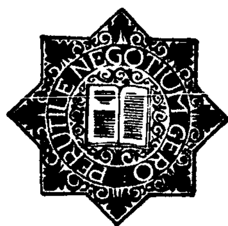
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

11e JAARGANG 1934/35, Nr. 2.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

---

gebruikelijke aanname van het bestaan van een vierde evenredige bij drie gegeven grootheden inderdaad door de Grieksche mathematici slechts op grond van aanschouwelijke evidentie, dus zonder axiomatische fundeering, is gemaakt (zooals Hasse en Scholz hebben gemeend). De schrijver toont aan, dat die axiomatische fundeering, bestaande in de formuleering van een axioma, dat aequivalent is met het continuiteitsaxioma van Dedekind, wel in de Grieksche wiskunde voorkomt, namelijk in verband met de cirkelquadratuur. In dezelfde spheer als de bijdragen van Becker hoort een verhandeling van O. Toeplitz (Bonn) thuis, *Die mathematische Epinomisstelle*, waarin een vroeger gedane belofte, een interpretatie te geven van de berucht-duistere mathematische plaats in den *Epinomis* (990c—991b), wordt ingelost op een wijze, die het probleem wel tot een definitieve oplossing schijnt te brengen. O. Neugebauer (Göttingen, thans Kopenhagen) behandelt in een opstel *Das Pyramidenstumpfvolumen in der vorgriechischen Mathematik* de interpretatie van een Babylonischen spijkerschrifttekst over den inhoud van een afgeknotte regelmatige vierzijdige pyramide. Theodor Peters (Königsberg) bericht over de *Befestigungslehre* van Christian Otter (Ragnit 1598—Nijmegen 1660), die zich behalve met mathematische problemen uit de vestingbouwkunde ook met mechanische voortbrengingswijzen van krommen blijkt te hebben beziggehouden. A. Schott (Bonn) bestudeert onder den titel *Zur Terminologie der mathematischen Keilschrifttexte* den terminuskima-si.

Evelyn Walker, A Study of the Traité des Indivisibles de Gilles Persone de Roberval . . . . Teachers College, Columbia University. Contributions to Education, No. 446. New York. 1932. VI en 272 blz.

Roberval, de mathematicus, die Ramus opvolgde aan het Collège Royal, een in zijn tijd hooggewaardeerd wiskundige, staat te zeer in den schaduw van de allergrootste figuren van zijn wetenschap, om thans nog algemeene bekendheid, laat staan bewondering, te genieten. Wat erger is: zijn naam, voorzoover nog voortlevend, is belast met menig ongegrond verwijt; de onophoudelijke polemieken met Descartes hebben zijn reputatie ten slotte meer geschaad dan die van den ondanks alle persoonlijke zwakheden toch steeds fascineerenden en imponeerenden philosoof; een rechtvaardige grief

tegen Torricelli is maar al te vaak tegen hem zelf gewend; de verdiensten van Cavalieri zou hij hebben gekleineerd.

Zoo kan het mooi uitgevoerde werk van Miss Walker in twee opzichten verheldering brengen. In de *Introduction* wordt uiteengezet, hoe Roberval, die wel heet gebakerd en prikkelbaar schijnt te zijn geweest, maar in wiens karakter niets laags voorkomt, onverdiend aan zijn slechten naam kon komen en hoe het gebeuren kon, dat hem de roem van menige ontdekking ontging. En in het eigenlijke werk, dat na een historisch-mathematische behandeling van den inhoud van het *Traité des Indivisibles* een vertaling van den tekst daarvan brengt, kan men ervaren, hoeveel mathematisch vernuft er vóór de ontdekking van de Infinitesimaalrekening aan den dag moest worden gelegd, om problemen op te lossen, die met haar hulp vaak machinaal te behandelen zijn. Al dat vernuft heeft — het is nu eenmaal de tragiek van het voorlooper-zijn — thans niet meer dan wat men historische beteekenis pleegt te noemen (en wat gewoonlijk niet als waardeering wordt bedoeld). Wie echter voor de bekoring daarvan gevoelig is en wie de identiteit van het ware mathematische denken onder de wisselende technische vormen vermag te erkennen, zal de schrijfster dankbaar zijn voor haar zorgvuldige studie.

K. Menninger, Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. Breslau. Ferdinand Hirt. 1934. X en 365 blz. Geh. R.M. 7; geb. R.M. 9.

Het getal — volgens een Grieksche opvatting het wezen aller dingen uitmakend — blijft door de eeuwen heen zijn geheimzinnige bekoring uitoefenen; de wiskundige wordt er door meegelokt in steeds verdere diepten van de tooverwereld der getallentheorie; de psycholoog, de historicus, de ethnograaf worden er telkens weer door gedreven, het ontstaan en de ontwikkeling van getalbegrip, telwoord en getalteeken na te sporen en de toepassing daarvan in het rekenen in haar groei te vervolgen. In dienst van het laatste streven stelt zich het boek van Menninger ten doel, na te gaan, op welke verschillende wijzen het getal in den loop der eeuwen als telwoord in de taal, als getalteeken in het schrift, is aangeduid en hoe in deze verschijnselen groei en samenhang te vinden is. Dat vereischte een zeer diepgaand en verstrekkend historisch, mathe-

matisch en linguistisch onderzoek in alle culturen, die de menschheid heeft doorloopen en in alle talen, waarin ze haar gedachten heeft geuit. Dat een Duitsch geleerde zulk een onderzoek durft ondernemen en dat hij het ten koste van jarenlang ingespannen verzamelwerk tot een goed einde kan voeren, zal niemand bevreemden. Maar ziehier nu het wonder: terwijl men gewoonlijk aanneemt, dat hij het bijeengebrachte materiaal dan niet anders dan in vrijwel onleesbaren vorm zal kunnen behandelen, blijkt hier iemand aan het woord te zijn, die zijn geheele omvangrijke stof in volmaakte helderheid weet te rangschikken en die (met volkomen inachtneming van de eischen, die men aan een wetenschappelijk betoog mag stellen) er over weet te praten op zoo eenvoudige, onderhoudende wijze, dat men, het werk oppervlakkig inziende, zou meenen met een onderhoudend populair geschrift te doen te hebben.

Ik zou dit boek in veler handen wenschen: van wiskundigen in de allereerste plaats, die er hun inzicht in schijnbaar zoo elementaire zaken als het benoemen en schrijven van getallen en het uitvoeren der hoofdbewerkingen verdiept door zullen voelen; van wiskundedocenten in het bijzonder, die er een gebied van de wiskundige leerstof, dat in jarenlange routine misschien alle bekoring heeft verloren, in een nieuw licht door zullen leeren zien; van taalkundigen vervolgens, die er tal van merkwaardigheden in de telwoordvorming van de meest uiteenloopende talen (de schrijver gebruikt er twee en dertig) door verklaard zullen vinden; van alle geestelijke belangstellenden ten slotte, die er de mathematische begripsvorming door zullen kunnen leeren beschouwen in cultuurhistorisch perspectief.

En men *kan* het al dezen categorieën, hoe uiteenloopend hun eischen ook zijn, in handen geven. Geen onderstellingen aangaande mathematische kennis schrikken den onwiskundigen lezer af en wie aan den anderen kant met wiskundig denken volkomen vertrouwd is, zal niettemin uit dit heldere betoog steeds weer leering en verrassende begripsverruiming kunnen putten.

Ik vermeld ten slotte nog afzonderlijk de zeer talrijke en hoogst belangrijke illustraties en sluit deze bespreking met de uiting van mijn hoogste bewondering voor het werk, dat de schrijver heeft verricht.

Gino Loria, Storia delle Matematiche. Volume terzo ed ultimo.

Dall'alba del secolo XVIII al tramonto del secolo XIX. Torino, S. T. E. N. 607 blz. 25 Lire.

Met het derde deel is Loria's Geschiedenis der Wiskunde, waarvan reeds vroeger in deze revue het eerste en het tweede werden aangekondigd, voltooid en zijn de wiskundigen van alle landen weer in het bezit van een betrouwbare, beknopte en helder geschreven geschiedenis van de geheele wiskunde. Dit laatste deel begint met de voortzetting van den grooten strijd over de infinitesimaalrekening tusschen de aanhangers van Newton en die van Leibniz, waarvan het tweede deel het begin heeft geschilderd. In Zwitserland staan de Bernoulli's en Hermann op de zijde van Leibniz; in Engeland houdt men Newton hoog, al ontketent Berkeley juist hier den bekenden en vruchtbaren beginselstrijd over de redelijke betrouwbaarheid der nieuwe methoden. Hierna wordt de ontwikkeling dezer methoden in Italië en Frankrijk bestudeerd. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan de eerste phasen van de waarschijnlijkheidsrekening. Uitvoerig worden daarna Euler en Lagrange, elk met zijn tijdgenooten en volgelingen behandeld. Na een periode van nabloei tijdens Revolutie, Consulaat en Keizerrijk gaat dan de wiskunde een nieuwe renaissance tegemoet: Gauss oefent zijn machtigen invloed uit; Bolzano, Cauchy, Abel en Jacobi hervormen de analyse in den zin der moderne strengheid; de niet-Euclidische en meer-dimensionale meetkunden verruimen sterk het geometrisch en daardoor ook het algemeen-mathematisch gezichtsveld; in de mathematische physica vindt de analyse nieuwe mogelijkheden van toepassing en nieuwe prikkels tot verdere ontwikkeling. In het werk van Chasles, Möbius, Steiner, von Staudt en Cremona beleeft de projectieve meetkunde haar gulden tijd.

Langzamerhand wordt dan het schrijven van een geschiedenis der wiskunde een onmogelijke taak: onoverzienbaar groeiend in diepte en omvang treedt de mathesis de periode van haar hedendaagschen bloei in en de historische behandelingswijze zou zich niet meer van de encyclopaedische kunnen onderscheiden. De schrijver vervolgt dus nog slechts kort de ontwikkeling der analyse tot in den nieuweren tijd, om daarna het boek te besluiten met een hoofdstuk over de historici der wiskunde en met een studie van de beoefening der wiskunde in China en Japan.

De voortreffelijke Italiaansche mathematicus heeft zich door dit werk een nieuwe en duurzame aanspraak op de dankbaarheid

der vakgenooten verworven. Het boek zal zoowel door historici als door beoefenaren der actueele mathesis met vrucht kunnen worden gebruikt.

Ganesh Prasad, Some great mathematicians of the nineteenth century; their lives and their works. In three volumes. Volume I, with six portraits: Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann. Benares City (India). Published by the Benares Mathematical Society. 1933. XV en 347 blz.

De schrijver geeft biographieën van de zes wiskundigen, die hij in de eerste helft der 19e eeuw de grootste acht met korte samenvattingen van den inhoud van hun voornaamste verhandelingen. Dat moest, gezien den matigen omvang van het werk, zeer beknopt gebeuren; zoo beknopt, dat men er bezwaarlijk de ontwikkelde theorieën door kan leeren kennen, wanneer men er niet langs anderen weg reeds eenigszins mee vertrouwd is geraakt. Het werk heeft dus uitsluitend waarde voor hen, die een globaal overzicht van de beginperiode van de moderne wiskunde wenschen of voor hen, die aan de hand van de gegeven schetsen dieper willen doordringen in het werk van een der behandelde onderzoekers (allen wiskundigen, wier levenswerk zoo omvangrijk of zoo diepgaand was, dat er jarenlange studie noodig zou zijn, om een van hen werkelijk grondig te leeren kennen).

De praestaties der moderne typographie schijnen tot Benares City nog niet te zijn doorgedrongen; in ons land zou het meest bescheiden schoolboekje zich schamen voor een gewaad, als waarin Prof. Prasad zijn geesteskind door de wereld laat gaan.

Roberto Marcolongo. La Meccanica di Leonardo da Vinci. Napoli. S. I. E. M. 1932. 147 blz.

De literatuur over het wetenschappelijk werk van den grootsten autodidact der geschiedenis is door Marcolongo reeds in 1929 verrijkt met een verhandeling *Le ricerche geometrico-meccaniche di L. da Vinci* (in *Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle Scienze detta del XL).* Thans zet hij zijn werk voort met een nauwgezette studie van aanteekeningen, die betrekking hebben op statica, vastheidsleer en dynamica, voorafgegaan door een, aan Duhem en Solmi aansluitend onderzoek naar de bronnen, waaruit

Leonardo voorlichting en inspiratie kan hebben geput. Men vindt overal de exacte reproductie van de oorspronkelijke teekeningen en de nauwkeurige opgaven van de plaatsen in de verschillende manuscripten, waaraan de mededeelingen zijn ontleend. De schrijver heeft er voorts naar gestreefd, zooveel mogelijk Leonardo zelf aan het woord te laten, waardoor hij zijn werk verrijkt en verlevendigt met al de deugden van het Vinciaansche proza. De moeilijke opgave, zich uit de verwarrende veelheid van notities uit allerlei verschillende perioden en van allerlei verschillende graden van voltooiïng een eenigszins helder beeld te vormen van de wetenschappelijke zijde van een der meest fascineerende persoonlijkheden, die de geschiedenis kent, wordt door dit werk weer een schrede nader gebracht tot haar oplossing.

De prijs van het werk is evenredig aan het royale formaat, waarin het is uitgevoerd.

Clemens Thaer, Die Elemente von Euklid. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben. Ostwald's Klassiker der Exacten Wissenschaften. Leipzig 1933. No. 235. Buch I—III. No. 236. Buch IV—VI.

In tegenstelling tot Engeland, Nederland, Italië en Denemarken bezat Duitschland nog steeds geen moderne uitgave van het in dubbel opzicht fundamenteele werk van Euclides. In deze leemte zal nu de vertaling van Thaer in de bekende, door Wilhelm Ostwald gestichte, reeks van vertalingen van klassieke werken, voorzien. De weergave van den Griekschen tekst is exact, zonder hinderlijk letterlijk te zijn; aan het eind van ieder deeltje vindt men beknopte aanteekeningen.

W. Breidenbach, Die Dreiteilung des Winkels. Math. Phys. Bibl. Band 78. Leipzig. Teubner. 1933. VI en 38 blz. Kart. R.M. 1.25.

Het klassieke trisectieprobleem wordt in dit werkje op bevattelijke wijze behandeld. In het eerste hoofdstuk wordt een bewijs van de onmogelijkheid der constructie met passer en lineaal gegeven (waarbij echter verschillende toegepaste stellingen zonder bewijs worden meegedeeld). Door de beperking tot passer en lineaal te laten vallen, blijken dan talrijke zeer uiteenloopende oplossingen mogelijk te zijn, die echter bij nadere beschouwing bijna alle een nauwen onderlingen samenhang vertoonen.

ANTWOORD AAN E. W. BETH.

Puntsgewijs wil ik trachten de door Beth in zijn kritiek, in Euclides 10, 214—218 uitgeoefend, ter sprake gebrachte meningsverschillen te bespreken.

1. De uitspraak: wiskunde = wetenschap zonder feiten, is in de door Beth gekritiseerde verhandelingen inderdaad niet nader gemotiveerd. Voor de motivering verwijs ik echter naar het artikel „Oordeelsgenese — Wat is wiskunde?" [1])

2. De weerlegging van het formalisme is, zoals elke weerlegging, die zich niet op het principium contradictionis beroept, een weerlegging in de vorm van een hypothetisch oordeel. Dit oordeel luidt: indien men de wiskunde t.o.v. de taalwetenschap autonomiseert, is het formalisme te verwerpen. Hier zijn Beth en ik het dus eens. Opgemerkt dient dan echter nog te worden, dat deze autonomisering noodzakelijke konsekwentie is van de definitie: wiskunde = wetenschap zonder feiten. De taalwetenschap is nl. een wetenschap met feiten.

Zou de wiskunde daarin een onderdeel zijn, dan zou hij zich niet kunnen onttrekken aan het proces, waardoor de taalwetenschap zijn oordelen tot geldige oordelen maakt: de verifikatie aan de feiten. Deze verifikatie speelt in het formalisme inderdaad een rol en wel op geheel dezelfde wijze als in de taalwetenschap. Beweerd kan dus slechts worden, dat het formalisme de wiskunde als autonome wetenschap opheft, anders niets.

3. Het meningsverschil aangaande het a priori betreft, als ik mij niet vergis, slechts een definitie. Beth vindt mijn definitie te ruim. Ik meen hem te moeten handhaven, omdat ik er doelmatig mee kan opereren. Het is mij verder niet duidelijk, wat Beth er precies voor in de plaats wil stellen.

4. Inderdaad worden de verschillende wiskunde-systemen tot

[1]) Verschenen in Annalen der critische philosophie 4, 1934, 17-32 (zie ook Alg. Ned. Tijdschrift voor Wijsbeg. en Psychol. 27, 1934, afl. 2).

autonome gebieden. Dat wil echter geenszins zeggen tot gebieden, welke los van elkaar staan en niets met elkaar te maken hebben. Integendeel, juist, doordat alle beantwoorden aan hetzelfde begrip wiskundig-stelsel, worden ze reeds tot een eenheid verenigd. Verder wordt deze vereniging intenser, als we het onderling verband, de auxiliariteit, tussen de mathematische systemen vinden. Dit treffen we daar aan, waar isomorfieen tussen systemen optreden, dus waar oordelen uit een mathematisch gebied getransformeerd kunnen worden in oordelen van een ander mathematisch gebied, zonder daarbij hun geldigheid of ongeldigheid te verliezen.

Meer algemeen, als wetenschappen, b.v. rechtswetenschap en zedeleer, t.o.v. elkaar geautonomiseerd worden, betekent dit slechts, dat ze op eigen a priori gefundeerd worden, dus dat i.c. niet als rechtsgeldig wordt verklaard, datgene wat zedelijk verantwoord is of omgekeerd. Het betekent echter niet, dat rechtswetenschap en zedeleer nooit in enig verband kunnen worden gezien. Dat dit wel geschieden kan, leert de politiek (de wetenschap van de politiek).

Uit een mondelinge diskussie bleek verder, dat onze meningen inderdaad niet wezenlijk verschilden.

Dr. P. G. J. VREDENDUIN.

DIDAKTIEK OF EXAKTHEID[1])

DOOR

B. COSTER.

Een kleine geschiedenis vooraf.

Het is al ruim een kwart eeuw geleden gebeurd, maar daarom niet minder aktueel. Er gingen klachten door de Nederlandse pers over onsmakelike en zelfs ondeugdelike voeding van de patienten in een onzer Moederlandse sanatoria voor longlijders. Een kort ogenblik had de zaak de publieke aandacht en wekte ze zelfs een vrij algemene verontwaardiging.

Een onzer meest betekenende vakbonden van die tijd bezat een afzonderlik fonds voor longlijders onder de vakgenoten en bekostigde daaruit voor verschillende hunner een verblijf in bedoeld sanatorium. De klachten hadden dus ook daar de volle aandacht. En zoo stevende op een goede dag een der bondsbestuurders, gemoedelike figuur, man van rijpe levenservaring en zeer helder oordeel, dus iemand, geknipt voor zulk werk, er op af voor een onderzoek in loco. En hij kwam dus ook bij de direkteur-geneesheer van het sanatorium terecht. Deze, die weliswaar met de financiën niets van doen had en zich in zijn hart met de gesignaleerde bezuinigingen op de voeding allesbehalve kon verenigen, maar die toch de zaak nog zoveel mogelik trachtte te sauveren, ging aan het „uitleggen". „Ja, ziet U, mijnheer Z.," aldus de medikus, „het voedingsprobleem is door ons zorgvuldig bestudeerd. Ik garandeer U, dat er voldoende vetten, eiwitten en koolhydraten in zitten. En dat betekent bij mekaar minstens zoveel calorieën. Het is daarom, dat ik vind, dat de klachten schromelik overdreven zijn".

De heer Z. had aandachtig naar deze „uitlegging" zitten luisteren, maar het antwoord kwam dan ook prompt. „Alles goed en wel,

---

[1]) Vereenvoudigde spelling.

dokter", aldus Z., *„maar als die calorieën nou eens allemaal op tafel blijven staan. Wat dan?"*

Tegen een dergelike repliek kon de dokter niet op en schoorvoetend gaf hij toe, zij het dan ook in een wijde omhaal van woorden, „dat er toch wel wat aan het eten mankeerde", en dat hij, voor zover het in zijn vermogen lag, zou zorgen, dat er verbetering kwam.

Het is aan deze geschiedenis, dat ik altijd weer denken moet, als er weer eens betoogd wordt, dat wij er toch voor te zorgen hebben, dat ons wiskundeonderwijs te voldoen heeft aan de hoogst bereikbare eisen van wetenschappelikheid. Vooral, als daar betoogd wordt, dat van stonde af aan dat de kinderen, pas van de L. S. op de H. B. S. gekomen, worden ingewijd in een geheel andere behandelingswijze van de getallentheorie b.v. dan ze op de L. S. hebben gehad, waar immers maar steeds eenzijdig op hun geheugen wordt geappeleerd.

Slag op slag worden wij onaangenaam getroffen door ons onverklaarbare teleurstellingen en toch proberen wij het telkens weer. De wiskunde zelf gaat ons zo ter harte, dat wij nooit aflaten en het telkens weer anders proberen. Wij leggen achter ons werk in de klasse al de suggestieve kracht, waarover wij beschikken, maar toch blijven bij velen, die werkelik niet onintelligent zijn, „de calorieën als maar op tafel staan".

En wij eindigen — bij velen voltrekt zich dat proces eerst na jaren — het met ons wiskundig geweten op een akkoordje te gooien. Voor ons zelf geven we dan toe, dat er klaarblijkelik voor een massa kinderen een onoverbrugbare tegenstelling blijkt te bestaan tussen de eisen van het vak en die der didaktiek.

Maar naar buiten praten wij daar niet over. Naar buiten doen we net, of wij buitengewoon veel nut hebben van de wetenschappelike voorlichting van enkele knappe koppen uit het korps, die het blijkbaar zoveel beter weten dan wij zelf. In ons hart echter nemen we ons voor, toch maar verder te gaan op de manier, die we geleerd hebben, dat tenminste nog enig resultaat garandeert. En laten wij dus de mooie wetenschappelike voorlichting kalmweg over ons heen gaan.

Mij dunkt, dat wij van deze geestesinstelling maar eens meer

moesten getuigen, dan tot nog toe geschiedde. Als dan werkelijk blijkt, dat bij de grote meerderheid der vakgenoten de eisen der didaktiek zich onmogelik laten verenigen met wat het vak aan wetenschappelike strengheid verlangt, dan komen we misschien zover, dat we geen verstoppertje meer behoeven te spelen met ons pedagogies geweten. Dan kan wellicht een methodiek van het wiskundeonderwijs worden opgebouwd, die allen bevredigt. Als namelik op onweerlegbare gronden is aangetoond, tot welke prestaties op exakt mathematies gebied een kind van bepaalde leeftijd en voldoende intelligentie in staat is. De metode zal zich daar dan bij moéten aansluiten, of ze wil of niet.

Hetgeen ik dus op het oog heb, is een psychologies gefundeerd wiskundeonderwijs en niet een onderwijs, dat in de eerste en voornaamste plaats heeft te voldoen aan zekere eisen van wetenschappelike strengheid.

Een aanleiding tot het schrijven van dit artikel vind ik in de lezing van den heer Dijksterhuis over „Epistemisch Wiskunde-onderwijs", gehouden voor de *Vereniging voor Pedagogies Onderwijs* aan de Rijksuniversiteit te Groningen. Ik heb deze voordracht, waarvan het verslag voorkomt in No. 4 van de vorige jaargang van dit tijdschrift, met grote belangstelling gelezen. De heer D. heeft ons heel veel mooie dingen te vertellen en ik zelf heb me dan ook stellig voorgenomen, om met veel van wat hij ons vertelt, mijn voordeel te doen.

Een stem, als hij ons laat horen, is goed, nu en dan gehoord te worden. Ze werkt mee, ons te behoeden voor een zekere verstarring, die maar al te makkelik optreedt in ons routinewerk van alle dag.

Maar dan komen de bedenkingen. Als de hr. D. uitlegt, „dat het wiskunde-onderwijs meer dan tot dusver epistemies moet zijn in deze zin, dat de leerling op ieder ogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de betekenis van de termen, die hij gebruikt en van de motivering van de metoden, die hij toepast", dan denken wij aan de velen uit de eerste klasse, die zoveel in den beginne maar niet willen inzien en later toch heel aardige leerlingen blijken te zijn, ook in de wiskunde. En als hij betoogt, dat voor de leerlingen bij hun intrede in het M. O. onmid-

dellik een nieuw leven dient te beginnen en zegt, dat er kans is, wanneer ze niet dadelik en zonder al te veel angst voor de kontinuïteit van de overgang zijn opgeheven tot het epistemies standpunt, dat ze de wiskunde op de H. B. S. blijven beoefenen, zoals ze het rekenen op de L. S. deden, dan rijst er, bij mij tenminste, enig protest.

Ik meende, dat de psychologie van de laatste kwart eeuw ons wel zoveel geleerd heeft, dat we kunnen weten, dat er in de intellektuele ontwikkeling van het kind geen of weinig diskontinuïteiten zitten; en dat, zo ze er al zijn, ze van zo weinig betekenis zijn, dat de leermetoden zich dienen in te stellen op een geleidelijke ontwikkeling.

Ik meende verder, dat de grote grief van de hele samenleving tegen de overgang L. O.—M. O. deze was, dat die overgang veel te abrupt geschiedt. En dat dus veeleer, dan dat er voor de kinderen op de H. B. S. onmiddellik een „nieuw leven" dient te beginnen, we er voor te zorgen hebben, dat van de kinderen de beklemming van het nieuwe wordt weggenomen.

Ik meende ten slotte, dat spesiaal wij wiskundeleraren, in deze buitengewoon schroomvallig hebben te zijn. Het grootste deel van de stereotiepe mislukkingen in de eerste klasse komt op onze hoofden neer. Voor die mislukkingen hebben wij tegenover de maatschappij verantwoording af te leggen. Wij hebben eenvoudig niet het rècht, ons op te sluiten in een ivoren toren van wiskundige wetenschappelikheid, n'en déplaise de resultàten.

Zonder dat ik in deze enige spesiale kritiek uitoefen op de voordracht van de hr. Dijksterhuis te Groningen, wil ik toch wel zeggen, dat het mij voorkomt, dat er bij velen onzer een onvoldoende besef bestaat van hun verplichtingen in deze tegenover de maatschappij. Als allen voldoende beseften, wat zij tegenover de kinderen, vooral de jongere onder hen, met hun wetenschappelik onderwijs *misdoen* — het harde woord moèt er bij me uit! —, dan was de tijd daar, dat niet langer de vakgeleerden, maar de kinderpsychologen beslisten, niet wat er geleerd *moet* worden, doch wat er geleerd *kan* worden.

Ik wil in dit verband slechts wijzen op de schromelik onbillike wijze, waarop verschillende niet onintelligente kinderen door het M. O. beoordeeld worden. Ze zijn of ‚stom", of „lui" of het zijn

„sufferds". Zeer frappant is hetgeen, waarop de heren G. van Veen en prof. Ph. Kohnstamm wijzen in hun publikatie No. 3 „De Aansluiting tussen L. O. en M. O." van het Amsterdamse Nutsseminarium voor pedagogiek. Ze laten daarin het M. O. zich zelf beoordelen door vergelijking van de beide bekende enquêtes van de Groningse psychologen Heymans en Wiersma. Zoals bekend mag verondersteld, is door deze geleerden in 1908 een herediteits-enquête gehouden, omvattende 1867 persoonsbeschrijvingen van medisi, betreffende *ongeselekteerde* volwassenen. Deze enquête, die dus volgens Van Veen en Kohnstamm wel geacht mag worden de gemiddelde struktuur van het mensenmateriaal te benaderen, leverde op 4,9 % apathen en 5,2 % amorphen. Tegelijkertijd werd gehouden een schoolenquête, betreffende een 4000-tal psychografieën van leerlingen van Middelbare Scholen in Nederland. De beoordeelaars waren hier de eigen leraren, zodat dus een beeld werd verkregen van de wijze, waarop de leerlingen reageerden op het onderwijs.

Welnu, in dit materiaal kwamen voor 12,8 % „apathen" en 22,0 % „amorphen". En dat, terwijl men op de H. B. S. te doen heeft met een sterk geselekteerde groep, welke volgens Terman's indeling moet worden ondergbracht bij de 20 % *bestbegaafde* leerlingen. Alzo bij een ongeselekteerde groep volwassenen ruim 10 % apathen en amorphen, en bij een sterk geselekteerde idem, *waaronder er feitelijk niet één behoorde voor te komen,* bijna 35 % apathen en amorphen.

Kohnstamm en Van Veen zeggen er van, dat deze kinderen natuurlik *niet* apaath of amorph zijn. Het is zo, dat ze op hun leraren slechts de *indruk* maken, apaath of amorph te zijn. *Het is de veel te sterke aandachtsverdeling van de H. B. S., welke die kinderen drijft in deze meest ongunstige hoek der menselike temperamenten.*

Waar de zaken zo staan, daar hebben in elk geval de wiskundeleraren in de allereerste plaats de hand in eigen boezem te steken. Ons vak vergt van de meeste kinderen zoveel, dat zeker een groot deel van de geschetste wantoestand op onze hoofden neerkomt. Een scherp onderscheid van de beide doseermethoden der empeiria en der epistème is heel mooi en heel goed, maar nog beter lijkt het mij toe, eerst uit te maken, *hoeveel* epistème spesiaal een begin-

nende H. B. S.-leerling hebben kán en *hoeveel* empeiria hij hebben moèt. En bovenal hebben wij uit te maken, hoe wij kunnen bevorderen, dat de overgang van de ene methode op de andere, die ook geschieden moet en *die juist tegenwoordig veel te weinig geschiedt,* zo geleidelik mogelik kan plaats hebben.

Voor mij in elk geval staat vast, dat die overgang niet abrupt mag geschieden en zeker niet op het ogenblik, dat de leerling de M. S. binnentreedt. Dat is het, wat ik spesiaal tegen de lezing van de hr. Dijksterhuis op te merken had. Voor het overige bevat die lezing zoveel moois en goeds, dat ik er zeker niet aan denk, er tegen te velde te trekken. Ze zal dan ook in het volgende geen onderwerp van verdere diskussie uitmaken.

Het is al weer een jaar of wat geleden, dat ik in de eerste klasse een meisje had, dat gedurende de eerste weken de indruk maakte, volslagen onvatbaar te zijn, voor èlke wiskundige redenering. Met de allereerste algebratechniek ging het nog wel, maar met de meetkunde was het absoluut huilen. Het kind kreeg op haar eerste rapport een 4, niet omdat ze dat sijfer verdiende — ik had haar net zo goed en 2 kunnen geven,— maar omdat ik eerst de kat nog eens wat uit de boom wilde kijken. In de twede helft van het twede kwartaal leefde het kind op en dus kreeg ze aan het eind er van een 6, hoewel die nog niet ten volle verdiend was en aan het eind van het schooljaar prijkte ze op haar rapport met een goedverdiende 7 voor meetkunde.

Het geval heeft me gefrappeerd en daarom maak ik er hier melding van. Ik heb nog geïnformeerd naar mogelike materiele oorzaken van deze verrassende verandering, maar heb ze niet kunnen vinden. De geschetste wijziging in instelling tegenover het vak meetkunde is dus in de psyche van het kind zelf te zoeken. Ik heb toen ook mijn aandacht gericht op andere dergelike gevallen en ze evenzeer gevonden. Waar ik niet kan aannemen, dat anderen niet dergelike ervaringen zouden hebben, daar moet ik konstateren, dat bij een meer of minder groot aantal kinderen zich het verschijnsel voordoet, de ze aanvankelik onvatbaar zijn voor een formeel logiese redenering en dat die vatbaarheid geleidelik komt als gevolg van een rijpende intellektuele ontwikkeling. Tegelijkertijd voel ik me gedrongen tot de overweging, dat een zeer groot aantal

van dergelike gevallen totaal aan de uiteraard ruwe waarneming in de klasse ontsnapt. Het is bekend, dat vele kinderen tot ongelooflike prestaties op het gebied van geheugenarbeid in staat zijn en dat dus heel veel van wat we bij proefwerk edg. als een zelfstandige geestelike prestatie zouden willen kwalifiseren, als zuiver geheugenwerk moet worden beschouwd, waaraan een eventueel logies redeneervermogen niet meedoet. Het verheugende is echter, dat er geleidelik bij velen hunner een keer komt en dat later het gerijpte oordeelsvermogen wèl een belangrijke rol gaat spelen. Dat het zeker niet weinigen zijn, bij wie het ontwikkelingsproses zich aldus voltrekt, staat vast. Doch daarover straks.

In elk geval is het zelfbedrog, voor een dergelike groei in de ontwikkeling de ogen te sluiten. Dit nu is mijn grief tegen verreweg de meeste wiskundeleerboeken der Middelbare School. Ook elders wordt het aldus aangevoeld. Ik kan niet nalaten in dit verband te siteren uit het zeer goede „Vlaamsch Opvoedkundig Tijdschrift". In het Maartnummer van de lopende jaargang komt een artikel voor van Prof. Ir. R. van Cauteren[1]), waaruit ik aanhaal:

„In vele leerboeken vindt men beschouwingen aangaande feiten als deze: of men kan of moet bewijzen, dat er evenwijdigen bestaan; of er door een punt buiten een rechte slechts een evenwijdige kan getrokken worden, enz.... Het is zeker, dat leerlingen, die de meetkunde beginnen te studeren, niet rijp genoeg zijn, om het belang — als het bestaat — en het voor en tegen, van zulke zaken te vatten. Voor hen blijven die teorema's ijdele woorden of nutteloze bewijzen van zaken, die van zelf spreken. Zeg voor dit geval eenvoudig, dat het als vanzelf sprekend moet aangenomen worden, dat er evenwijdigen bestaan, dat door een punt buiten een rechte maar een evenwijdige getrokken kan worden, dat twee rechten, die evenwijdig aan een derde zijn, het ook onderling zijn, enz. ...... zonder hier van teorema's of postulaten te gewagen. Dat het aldus kan gebeuren, dat eigenschappen als vanzelfsprekend beschouwd worden, die, op de keper beschouwd het niet zijn, is geen groot nadeel en het is trouwens onvermijdelik bij een beginnend onderwijs. *Om van dergelike eigenschappen het bewijs te verstaan,*

---

[1]) Zie „Het Vlaamsch Opvoedkundig Tijdschrift", 15e Jaargang Maart 1934. Uitgever voor Nederland L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch. „De Wiskunde in het M.O." door Prof. Ir. R. van Cauteren, pag. 340 t.a.p.

moet men eerst begrijpen, dat er iets te bewijzen is; dit zien de leerlingen niet in. (Kursivering van mij, C.). Geeft men het bewijs toch, dan wordt het voor hen loutere woordkramerij, uitgevonden om de gemakkelikste zaken moeilik te maken, en het grote nadeel er van is, dat de belangstelling in de kiem verstikt wordt".

Tot zover prof. Van Cauteren.

Zelden heb ik het voorrecht gehad met evenveel instemming een andermans mening te mogen siteren. Al heb ik het dan in het bovenstaande niet onderlijnd, ik vestig nog eens de volle aandacht op het slot van voormeld sitaat:

Het nadeel der geschetste woordkramerij is, dat de belangstelling in de kiem wordt verstikt. Voor wie iets weet, hoeveel waarde de moderne kinderpsychologie hecht aan de *belangstelling* als levenwekkend element van alle onderwijs, voor die is de opvatting van prof. Van C. een richtsnoer bij al zijn werken in de klasse. Het kostelikst, wat we bij de kinderen kunnen doden, is niet een onvoldragen mathematies redeneervermogen, het is de belangstelling in alles, wat de mathematiek aangaat.

Heb ik in het voorgaanle de spesiale aandacht gevraagd voor het feit, dat verschillende kinderen in het begin niet vatbaar zijn voor een formeel logiese redenering, doch dat dit redeneervermogen geleidelik stijgt en we met deze omstandigheid ten volle rekening moeten houden bij ons onderwijs, er is nog een twede zaak, die hierbij ook de volle aandacht waard is. Ze is deze, dat er slechts een betrekkelik gering aantal leerlingen bestaat, die voor de verschillende vakken der H. B. S. een natuurlike en blijvende belangstelling bezitten. „Nur bei denjenigen Köpfen, die wissenschaftlich veranlagt sind", zegt Ed. Spranger in zijn opstel „Grundlegende Bildung, Berufsbildung, Allgemeinbildung", voorkomend in zijn bekend werk *„Kultur und Erziehung"*, gelingt es ihr (i.c. de middelbare school) noch nach der Pubertät, sie in der Welt des Allgemeinen und verhältnismäszig Lebensfernen festzuhalten, wie es aus dem Wesen einer so ausgedehnten Grundlegung folgt. Diese Naturen werden durch die Pubertät geradezu in einen halb theoretischen, halb ästhetischen Universalismus hinausgezogen, der sie befriedigt, bis auch sie ein Festes brauchen.

Die anderen aber verlangen als Gegenwicht gegen die Gefühls-

schwankungen der Pubertät und zur Stütze ihres werdenden Selbstgefühls geradezu die Bindung an einen scharf umrissenen Aufgabenkreis, der zu ihren wirklichen Lebensinteressen in unmittelbarer Beziehung steht. Mit anderen Worten: der Spielraum des allgemeinen Bildungsdranges ist nicht bei allen Jugendlichen so weit, wie es die höhere Schule vorauszusetzen beliebt; daher die Tragik so manches Sekundaner- und Primanerschicksals".

Spranger schuift dan ook als postulaat voorop:

De weg tot een hogere algemene ontwikkeling voert over het beroep en over het beroep alleen.

Ik weet wel, dat we momenteel niet veel verder komen met het konstateren van de juistheid der Sprangerse opvatting. Het gaat bij deze beschouwingen zeker niet over de meer of mindere wenselikheid van een omzetting van het grootste deel der hedendaagse H. B. S.-en in vakscholen naar Amerikaanse trant. Ik voer ze echter aan, om nog meer dan in het voorgaande reeds geschied is, te doen beseffen, dat we allesbehalve met een zeker wiskundig prestatievermogen der leerlingen als gegeven grootheid rekening mogen houden.

Doet men dit laatste toch, dan maakt men het zich zelf wel heel makkelik. Dan stelt men een bepaalde norm vast, waaraan de leerlingen hebben te voldoen en schift uit, wie onder de maat zijn. En met de rest bedrijft men naar hartelust zijn wetenschappelik wiskundeonderwijs.

Van deze laatste mening zijn in dit tijdschrift genoeg voorbeelden aan te halen. Het kan niet anders, of bij tijd en wijle moeten voorstanders dezer opvatting zich gruwelik onrechtvaardig ten opzichte van het peil hunner leerlingen uitlaten. En idem over de school, die hun die leerlingen bezorgt, i. c. de L. S.

Het is de heer Beth geweest, die zich in dit tijdschrift, als ik me wel herinner zelfs meermalen, in deze geest heeft uitgelaten. Voor hem is de H. B. S. de school, die als hoofddoel heeft de vorming van de geest en dus is het voor hem volkomen juist, dat op de H. B. S. zo'n grote plaats aan de wiskunde is ingeruimd om haar vormende waarde. Daaruit resulteert dan de eis, dat gestreefd wordt naar een zo groot mogelike graad van exaktheid. 't Bereikbare in deze hangt voor de heer B. af van de vermogens der leerlingen

en hun ontwikkeling, hetgeen hij samenvat onder de benaming van hun „leervermogen".

Bij een dergelike opvatting, zoals wij die aantreffen in zijn artikel „De ontwikkeling van het Getalbegrip bij het M. O. en het V. H. O." in de 5e Jaargang van dit tijdschrift, valt het niet te verwonderen, dat hij spesiaal de schuld geeft aan het L. O. van het feit van het bestaan van een kloof tussen L. O. en M. O. (Zie Bijvoegsel I pag. 95 enz.)", omdat de fundamenten niet zijn gelegd in overeenstemming met het gebouw, dat er op zal moeten rusten".

En niet geheel rechtvaardig meer is de hr. B. tegenover die leerlingen, die hem bij een bepaald stuk wiskunde de vraag — de „ergerlike vraag" — stellen: *Wat men er aan heeft?*

Deze vraag is *niet* ergerlik, ze is volkomen natuurlik en volkomen logies. Alweer, ik maak de hr. B. geen verwijt van zijn opvatting. Integendeel ik bewonder in hem de hoge opvatting van zijn vak. Ik zou alleen wensen, dat hij daarnaast wat meer oog had voor de eisen van het leven en vooral voor de eisen van de kinderpsyche. Het is ook al weer niet spesiaal de hr. B., wiens opvatting ik hier bestrijd, het is de opvatting van een grote, wellicht zelfs zeer grote groep van wiskundedosenten, die hier bestreden wordt.

Het is de opvatting, alsof er sprake zou kunnen zijn van een bepaald peil van geestesontwikkeling en vooral vatbaarheid voor ontwikkeling, welke beslissend zouden kunnen zijn voor de doseermethode der epistème. Geen van beide is waar. Bij een zelfde kind is die vatbaarheid in verschillende levensperioden in alle mogelike graden aanwezig en ook bij een zelfde kind is in verschillende levensomstandigheden de belangstelling voor de wiskunde als alles beheersende faktor voor sukses van het wiskundeonderwijs in alle mogelike graden aantoonbaar.

Voor wat betreft het laatste, is het dan ook onjuist, dat er niet anders zou kunnen bestaan dan een scherpe tegenstelling tussen belangstelling voor problemen van exaktheid als uitingsvorm van een geest, die uitsluitend op intellektuele en aestetiese vorming is ingesteld en die voor techniek en techniek alleen bij personen, voor wie het beroep het allesbeheersende is. Het is eenvoudig een niet te lochenen feit, dat bij de laatsten, bij wie de belangstelling eenmaal is gewekt, doordat het beroep in het sentrum der oplei-

ding is geplaatst, die belangstelling zich ook veelal richten gaat op zuiver teoretiese kwesties. Terwijl bij dezelfde types, toen ze hun bestemming nog niet hadden „gevonden", wel elke belangstelling voor presies dezelfde kwesties dood leek.

Genoeg om te doen zien, dat hier niet met een zeker „leervermogen" als gegeven grootheid mag worden gerekend.

Inderdaad doen de meeste kollega's dit dan òok niet. De meesten komen voor zich zelf tot de slotsom, dat het eerste en voornaamste, wat er van hen geëist wordt, toch wel dit is, dat ze de kinderen iets leren. En dus leren zij zich, zo goed en zo kwaad als het kan, aanpassen aan het kinderlik „leervermogen", zoals het inderdaad is. Alleen, het geschiedt zo weinig bewust, dat het daardoor ten dele zijn waarde verliest en ook — er wordt lang niet genoeg van getuigd.

Over beide nog een enkele opmerking. De instelling op het peil van het kinderverstand geschiedt m. i. te onbewust. Er zit niet voldoende achter het besef, dat elke leeftijd zijn eigen eisen heeft. Ware het laatste zo, dan zou het onderwijs van velen een veel meer gedifferentiëerd karakter vertonen. Nu menen ze, dat er geen sprake kan zijn van een goed exakt wiskundeonderwijs, omdat de kinderen er toch niet bij kunnen, maar ze vergeten, dat, wat wààr is voor de aanvangsklasse, niet meer wààr behoeft te zijn voor de 4e en 5e klassen. Ze moeren zich vast in de techniek, en blijven er in vastgemoerd. Ze gaan door met techniek in klassen, waarin deze misplaatst is. Het wiskundeonderwijs in de 5e klasse mag niet meer zijn de bekende sommenmakerij en vooral het gedril op het bekende type examen-vraagstukken. In die klasse is het wel mogelik het limietbegrip b.v. in volle strengheid te behandelen. Ik zou wel eens willen weten, hoevelen er dat tans in volle bewustheid nalaten.

Nu kunnen de mannen van de wiskundige exaktheid daartegen wel blijven fulmineren, maar daarmee komen ze er niet. De liefhebbers der sommenmakerij laten er zich geen haar door van de wijs brengen. Ze menen hun metode te kennen als beproefd en dus gaan ze er kalmweg mee door, wàt hun ook voor ander mogelikheden worden voorgehouden.

Hiermee kom ik op het twede punt. Er bestaat een m. i. ontoe-

laatbare tegenstelling tussen de geest van verschillende wiskunde-leerboeken en de gevolgde metode in de klasse. Het is helaas zo, dat verschillenden zich van hun goede leerboek — „wiskundig-goede" natuurlik! — net zoveel aantrekken, als het hun belieft. Over de teorie glijden ze als een noodzakelik kwaad zo spoedig mogelik heen en verder benutten ze het boek als een geschikte vraagstukkenverzameling. Er bestaat ten deze absoluut geen eenheid. Eenvoudig, omdat de grote verschillen in het gebruik dezer leerboeken door de een en de ander prakties zo moeilik te konstateren zijn.

Naar mijn mening is van deze toestand de schuld het leerboek en het leerboek alleen. Dat leerboek moest zo zijn, dat het eenvoudig *dwong* tot een meer uniforme behandelingswijze. Het moest zo zijn, dat ieder normaal leraar met hart voor zijn werk voelde: ja, zo behoort inderdaad dit en dat onderdeel in dit stadium behandeld te worden en het leerboek is me daarbij een veilige gids.

Welnu, mijn mening is het, dat dergelike leerboeken, zowel voor de algebra, als voor de meetkunde ons nog steeds ontbreken. Wij hebben verschillende wetenschappelik gesproken uitmuntende leerboeken, maar vooral voor het begin geldt: hoe beter uit wetenschappelik oogpunt, des te minder geschikt zijn ze voor de leerlingen en voor het onderwijs.

En juist deze omstandigheid veroorzaakt een volharden in de methode der empeiria in een stadium, waarin dit didakies niet meer verantwoord is. Kregen we het psychologies gefundeerde leerboek, dan zou dat uit zijn. In elk geval zou het belangrijk verminderen en een gevolg zou zijn, dat ook de aansluiting naar boven, i. c. die aan het H. O. er ten zeerste door zou verbeteren. Door gefulmineer tegen degenen, die toch bij hun oude metode blijven volharden, geschiedt dat niet.

Ook al konstateren verschillenden een grote opleving in het wiskundeonderwijs van de laatste 10 jaren in Nederland, ik zelf kan dat optimisme niet in alle opzichten delen. Inderdaad zijn er moderner leerboeken gekomen en inderdaad breken zich spesiaal t. a. v. het algebraonderwijs betere opvattingen baan. Met de didaktiek van het vak echter is het m. i. nog steeds zo gesteld, dat er allesbehalve reden bestaat tot tevredenheid. Buiten de betrekkelik geringe groep dosenten, die ten volle overtuigd zijn van

de juistheid hunner opvatting, dat dit onderwijs gegeven behoort te worden met een zo groot mogelike exaktheid, welke groep waarschijnlik kleiner is dan het wel lijkt, waar tot nog toe in dit tijdschrift vrijwel uitsluitend voorstanders dezer opvatting aan het woord zijn geweest en buiten de waarschijnlik veel grotere groep kollega's, die onberoerd door de nieuwere ideeën, voortgaan hun onderwijs in volmaakt ouderwetse geest te geven, is er stellig een heel grote groep, die het nu klaarblijkelik helemaal niet meer weet. Deze mensen willen wel graag anders, doch hebben voortdurend voor ogen de onmacht van een groot deel der leerlingen, om het onderwijs te volgen, dat zij zo gaarne geven zouden. Hun onderwijs is een voortdurend kompromis. Sommige hunner missen elk houvast en dat heeft een verlammende invloed op de animo, waarmee ze hun werk verrichten. Het zijn zij, die ontvankelik zijn voor de kritiek, waarmee een deel van de maatschappij het lerarenwerk aan de M. S. overlaadt. Zij missen de innerlike zekerheid, om met kracht van argumenten en grote overtuiging hun werk te verdedigen.

Het is, dunkt mij, van grote waarde, hun die innerlike zekerheid weer terug te geven. Ik zie de mogelikheid daarvan slechts in één richting, nl. door een wiskundemetode op te bouwen, die volledig rekening houdt met de uitkomsten der moderne psychologie. Tot nog toe is dat in het geheel niet gebeurd. Juist voor de wiskunde zou zulks hoogst noodzakelik zijn en toch lijkt het mij toe, dat er geen vak is, waaraan deze dingen zo onberoerd zijn voorbijgegaan als aan de wiskunde.

Er bestaat een vrij algemene ontevredenheid over de huidige toestand. Dat is in elk geval reeds een verheugende omstandigheid. Men zoekt het in twee richtingen, nl. enerzijds in een didaktiese opleiding van de wiskundeleraren aan de universiteit en anderzijds in de wenselikheid van een propedeutiese kursus op de M. S., zowel voor de planimetrie in de eerste klasse, als voor de stereometrie in de vierde. Voor wat betreft het laatste verwijs ik in dit verband naar de serie lezingen, gehouden door de heer D. van Dantzig voor het Amsterdamse Nutsseminarium voor Pedagogiek over de didaktiek der wiskunde in de jaren 1928 en 1929. In de 5e lezing van 4 Maart 1929 verdedigde de hr. Van D. een intuïtieve propedeuse voor de meetkunde. Zijn eerste desideratum luidde aldus:

„Meetkunde-onderwijs volgens de metode van Euclides mag

uitsluitend gegeven worden, *nadat* de leerlingen een grote mate van geometriese ervaring verworven hebben. Daartoe worde een z.g. intuitieve propedeuse gegeven",

en zijn twede als volgt:

„Bij deze intuïtieve propedeuse streve men er naar, alle strengheid en exaktheid van uitdrukking terzijde te stellen en de ervaringen weer te geven in ongeorganiseerde kindertaal. Anders gezegd: men streve er naar, de aandacht zoveel mogelik van de *woorden* af te leiden en deze in het *onderbewuste* te konsentreren".

Ten slotte wil de hr. Van D. bij de formalisering der overtuigingsmiddelen (de „bewijzen") analyties te werk gaan. „Daarbij worde de eenvoudigst bruikbare vorm van de voornaamste axiomata opgespoord. In den beginne ga men niet verder terug dan b.v. tot de kongruentie-eigenschappen, de eigenschap, dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan 180°, enz., die hier dus axiomata zijn. Finesses der axiomatiese behandeling, zoals de tussen-axiomata, dienen in elk geval, zo men ze wil geven, tot het allerlaatst bewaard te worden".

Tot zover de hr. Van D. over de meetkunde. In zake de algebra gaan de door hem gewenste veranderingen niet zo ver. In hoofdzaak bepalen ze zich tot de volgende betrekkelike kleinigheden:

1. dat hij het algebra-onderwijs wil beginnen met de oplossing van eenvoudige vergelijkingen,

2. dat hij het opstellen en lezen van formules grondig wil instuderen,

3. dat hij een uitvoerige en grondige behandeling wenst van formele regelmatigheden, en

4. dat hij de kinderen door gezette oefening wil wennen aan *korte* oplossingen.

Men kan het met de heer Van Dantzig eens zijn en vooral zijn desiderata op het gebied der meetkunde hartgrondig toejuichen, en nochtans menen, dat hij de oplossing van de moeilikheden, waarin we nu zitten, niet geeft. De zaak is, dat het uitspreken van een aantal desiderata op dit terrein, met hoeveel innerlike overtuiging ook, niet meer voldoende is. Op ons gebied hebben m. i. tot nog toe veel te veel de vakgeleerden de toon aangegeven. Mij bekruipt zo vaak de gedachte, als ik door de mannen der wetenschap allerhande wenselikheden hoor formuleren: man, ik wou, dat is eens mocht zien, hoe je het zèlf zou doen en ik wou ook, dat ik dan de

inwerking van je onderwijs op de leerlingen zou mogen kontroleren.

Ik noem hierbij geen namen. Ieder, die de bereids verschenen jaargangen van Euclides aandachtig nagaat, kan ze vinden. Slechts maak ik een uitzondering voor prof. Schuh omdat ook bij hem ten duidelikste het besef aanwezig is, dat men in zijn eisen van strengheid toch waarlik niet te ver mag gaan. Ik verwijs hierbij naar zijn voordracht over „De waarde van het Wiskundig redeneren", voorkomende in Euclides IV, pag. 181, enz., waarin hij zegt, dat het vanzelf spreekt, dat men bij het oefenen in streng redeneren niet tot het uiterste moet gaan, *„daar het onderwijs alle nut verliest, zodra men over de hoofden zijner leerlingen heen praat"*.

Ik wou dat dit laatste toch eens algemeen werd beseft. Het is als met het verhaaltje van de calorieën. Er blijven er helaas nog steeds zoveel „op tafel staan". Want dikwijls is de kost, die wij opdissen, zo onverteerbaar voor de kindermaag. Zelfs op de wijze, waarop prof. S. te werk wil gaan. Want ik heb een stil vermoeden, dat hij de grens heel wat verder wil leggen, dan psychologies verantwoord is.

Wij hebben ons te veel laten leiden door de knapheid op vakgebied en hebben de ogen leren sluiten voor de werkelikheid. Het wordt tijd, dat wij oog leren krijgen voor de dessous van een sosiaal pedagogies probleem als dat van de aansluiting tussen L. O. en M. O. en voor wat de psychologie ons kan leren omtrent de verwerkbaarheid der leerstof door de kinderen.

Spesiaal het laatste is nu van belang. Voor de vakgeleerde dient de psycholoog voor een belangrijk deel in de plaats te treden. Deze kan ons leren *wachten*. Want dat hebben wij buitengewoon hard nodig. Er is op dit gebied niets te forseren. Wij moeten leren wàchten. Presies, zoals de leraar in lichamelike opvoeding geleerd heeft te wàchten. Bij de lichamelike ontwikkeling springt het zelfs de leek in het oog, dat men van kinderen van 12, 13 jaar geen prestaties mag verwachten, die passen bij de geoefende atleet. Het lichaam reageert onmiddellik op dergelike pogingen met een „non possumus".

Feitelik doet de geest dit ook, doch het springt minder in het oog. De geest reageert door „luiheid", „onverschilligheid", „versuffing", maar dit wordt niet onderkend als een doodgewone reaktie van de persoonlikheid op geestesstof, welke ver boven het

bevattingsvermogen ligt. Alleen als vakpsychologen de aandacht vestigen op het allerbespottelikste verschijnsel, dat de M. S. zelf een 35 % van haar adepten als apaath of amorph kwalifiseert, terwijl er in feite niet één bij behoort te zijn, dan komt er bij sommigen een moment van bezinning.

Dan rijst de vraag, of er nu werkelik geen middelen zijn, om voor ons, zo op exaktheid gestelde wiskundeleraren, op exakte wijze uit te maken, wat nu wel de leerlingen op verschillende leeftijden hebben kunnen. Welnu, dergelike middelen zijn er en zouden ons in overvloed geleverd kunnen worden door de psychologen van professie.

Het is dit werk, waarvoor ik hier de volle aandacht vraag. Er moeten werkkommissies worden samengesteld, bestaande uit pedagogies georienteerde wiskundeleraren en vakpsychologen, die voldoende voor de exakte wetenschappen voelen en er voldoende van op de hoogte zijn, om door middel van psycho-techniese onderzoekingen uit te maken, welk soort wiskundeonderwijs voor de verschillende leeftijden past.

Ik wijs hier op een tweetal Duitse publikaties, die reeds in deze richting gaan, nl. de „Psychologie des Oberstufenkindes" door W. Schuhmacher en „Das Schluszfolgernde Denken des Kindes" door H. Ormian. Vooral het laatste werkje lijkt me van betekenis. Het is een uitgave van 1926 van de Deutschen Verlag für Jugend und Volk en behoort tot de reeks „Wiener Arbeiten zur Paed. Psychologie". Ormian heeft op de bekende wijze als van de stilleestests onderzocht, hoeveel kinderen van bepaalde leeftijd en bepaalde intelligentie vatbaar zijn voor wat hij noemt formeel-logiese redeneringen, dat zijn redeneringen, zoveel mogelik geabstraheerd van het materiële.

Als iets anders het niet kan doen, dan moeten zijn uitkomsten ons de bezinning brengen, die we in deze zaken zo nodig hebben. Hij zegt, dat op ongeveer 13-jarige leeftijd de formele logika zich *begint* te ontwikkelen. Van de normaal-intelligente kinderen van die leeftijd zijn hoogstens een 45 %, dus nog niet de helft, tot een formeel-logiese redenering in staat, dan wel vatbaar tot het begrijpen van een dergelike redenering door anderen. Dit bedrag van 45 % geldt op die leeftijd voor jongens en meisjes vrijwel in gelijke mate.

Daarna begint de differentiëring. Bij de jongens gaat bedoeld vermogen bij het toenemen in leeftijd met sprongen omhoog. Op 14-jarige leeftijd is een 70 à 80 % der jongens vatbaar voor formele logika, totdat op 15 à 16-jarige leeftijd de volle 100 % is bereikt.

Bij de meisjes gaat het anders. Zijn er een 45 % meisjes op 13-jarige leeftijd, die vatbaar zijn voor een formeel logiese redenering, dit persentage klimt op 15-jarige leeftijd tot 60 en op 17-jarige leeftijd tot 70 %, om dan verder niet hoger te komen. Ondanks een gunstige intelligentie blijven dus een 30 % der meisjes onvatbaar voor formele logika.

Deze getallen kunnen uiteraard nog nader getoetst worden en zullen dan waarschijnlik nog wel voor enige korrektie in aanmerking komen. Waar ze echter kloppen met datgene, wat ieder ervaart, die niet hardnekkig de ogen wil sluiten voor de werkelikheid, daar laten ze m. i. reeds nu enige voorlopige konklusies toe.

De belangrijkste is deze, dat we hebben te leren, geduld te oefenen met de aandrang, die zovelen in zich voelen, om de kinderen zo spoedig mogelik bezig te houden met exakt-wiskundige redeneringen. We moeten leren wàchten. Kunnen we dan al niet geven dat wiskunde-onderwijs, dat we zo gaarne geven zouden, ons wachten zal in zoverre rijkelik beloond worden, doordat vele leerlingen zich geheel anders gaan instellen tegenover het vak, dat onze liefde heeft. Ze zullen niet bedorven worden voor de wiskunde en meer dan tot heden zullen uitblijven de bekende idioterieën, die ieder uit zijn eigen praktijk kent.

Een twede konklusie is wellicht deze, dat er differentiatie behoort te komen in het wiskundeonderwijs aan meisjes en jongens.

En een derde is stellig die, dat we nog verre verwijderd zijn van het *goede* leerboek. Het *goede* wiskundeleerboek voor de H. B. S. moet nog geschreven worden. Hoe het er uit zal zien, is niet aan mij om uit te maken. Want het zal het resultaat zijn van een langdurige en moeizame studie. Tot het schrijven van een dergelik leerboek ontbreken de gegevens nog vrijwel geheel. Het zal ook wel niet alleen door mensen van het vak geschreven kunnen worden, tenzij ze voldoende psychologies georienteerd zijn. Waarschijnlik zal het wel moeten ontstaan in samenwerking met vakpsychologen, die tegelijk wiskundig voldoende bij zijn.

Het Amsterdamse Nutsseminarium heeft zich reeds meermalen

bezig gehouden met de didaktiek van het wiskundeonderwijs. Het verkeert in de gelukkige omstandigheid, dat het aan het hoofd heeft een man, die op het gebied der exakte wetenschappen uitstekend georiënteerd is, nl. prof. Kohnstamm. Het moet mogelik zijn voor de diverse verenigingen van leerkrachten in de wiskunde, om met prof. K. dat kontakt te verkrijgen, dat nodig is, om de voorbereidende onderzoekingen op touw te zetten, welke ons uit de impasse van nu kunnen halen.

Dan kunnen we krijgen het goede leerboek, waaraan het wiskundeonderwijs zo'n behoefte heeft. Dat leerboek, dat in zijn geleidelike opklimming geheel de psychologiese verschijnselen der verschillende leeftijden volgt, acht ik van zoveel belang, dat het voor mij bijna de wenselikheid ener goede didaktiese opleiding der leraren nog overtreft. In elk geval behoeft niet op het laatste gewacht te worden, om het eerste reeds tot stand te brengen. Want het goede leerboek, gekombineerd met de lessen der eigen ervaring, zal de jonge wiskundeleraar vanzelf in de goede richting dringen.

De vraag rijst, of we in afwachting van de resultaten der door mij aangegeven onderzoekingen en van het verschijnen van het psychologies gefundeerde wiskundeleerboek, niet reeds nu zoveel mogelik in een richting kunnen leren werken, die veel meer, dan tot nog toe is geschied, rekening houdt met de kinderlike psyche.

Voor mezelf heb ik, voor wat betreft de meetkunde, deze vraag opgelost, door het fundament te leggen in de buurt van de somstelling van de hoeken van een driehoek, nadat ik een korte inleiding heb gehouden over de snijding van 2 rechten door een derde.

Moeiliker was voor mij de algebra. Van hoeveel belang een goede sijfertechniek ook is, een uitsluitend algebraies gesijfer heeft me nooit kunnen bevredigen, ook niet in de eerste klasse. Er moèt teorie bij, alleen is het de vraag in welke mate. Na lang zoeken ben ik voor mezelf tot de slotsom gekomen, dat het die teorie moet zijn, die kan meehelpen, om de gewone typiese fouten, die zich altijd en overal voordoen, te vermijden. Dus geen teorie over zaken, die inderdaad „vanzelf" spreken. Daartoe behoort verreweg het grootste deel van de toepassing der hoofdbewerkingen op het sijferen met letters. M. i. hebben de kinderen in de eerste klasse dat op presies dezelfde wijze te leren, als ze op de door sommigen

zo gesmade lagere school het getallensijferen hebben geleerd, nl. door doèn, doèn en nog eens doèn.

Ondanks het feit, dat verschillende hunner voorlopig nog onvatbaar zijn voor een formeel logiese redenering, zullen ze de uitkomsten der besijferingen grotendeels als een vanzelfsprekendheid aanvaarden. Waar dat het geval is *en geen fouten worden gemaakt,* daar acht ik het erger dan overbodig, ik acht het zelfs schadelik, in dergelike zaken de kinderen te gaan plagen met teorie. Want voor mij is het feit, dat er buiten de gewone „vergissingen" geen fouten worden gemaakt, voldoende, om te konkluderen, dat de zaak begrepen is, zij het dan op kinderlijke wijze. Ik stel me hierbij tevreden met het feit, dat er verschillende soorten van „begrippen" mogelik zijn en dat het begrip, dat wij bij slot van rekening wensen, het resultaat zal zijn van een gewoon geestelik ontwikkelingsproses, grotendeels verband houdend met het toenemen in leeftijd.

Anders staat het met die dingen, waarbij voortdurend dezelfde kenmerkende fouten voor de dag komen. Op een dier fouten wordt steeds weer gewezen door elke publisist, die een grondige behandeling der getallenteorie wenst. Het is de fout van een verkeerd gebruik van de distributiviteit bij de diverse bewerkingen. Daartegen worden fouten begaan tot in de 5e klasse toe.

Welnu, naar mijn mening worden die fouten niet vermeden door een volledige getalteorie, die uiteraard heel veel zal bevatten, wat de leerlingen naar hun eigen mening volslagen bekend is en waarvan eventuele bewijsvoeringen hun aandacht niet zullen vermogen bezig te houden, gesteld al, dat ze allemaal rijp zouden zijn voor een dergelike bewijsvoèring. De foutenbron kan in dit stadium m. i. alleen worden gestopt door de oorzaak der fouten in korte, handelbare regels weer te geven en van de teorie presies zoveel te behandelen, als nodig is, om die regels te „begrijpen". De kinderen zullen bij een dergelike behandelingswijze niet het gevoel krijgen, dat ze dingen leren die ze allang kennen en dus kan er als voor iets werkelik-nieuws wel de belangstelling voor worden gewekt.

Voor wat betreft het verkeerde gebruik van de distributiviteit, zou ik als uitermate belangrijk ze het schema willen leren van de verschillende verbindingen van 2 getallen in de bekende vorm. Hierbij kan duidelik worden gemaakt — de omkeringen spelen ook in de meetkunde een belangrijke rol — dat elke rechtstreekse

bewerking 2 omkeringen naast zich krijgt, omdat de in de verbinding optredende getallen elk afzonderlik te verwisselen zijn met het resultaat. De aandacht wordt er op gevestigd, dat deze beide omkeringen bij de optelling en de vermenigvuldiging prinsipiëel niet verschillen en bij de machtsverheffing wel, omdat de beide eerstgenoemde bewerkingen wel commutatief zijn en de machtsverheffing het niet is.

Het schema ziet er dan als volgt uit:

	Rechtstreekse bew.	*Omgekeerde bew.*
1e Orde . . .	Optelling	Aftrekking
2e Orde . . .	Vermenigvuldiging . .	Deeling
3e Orde . . .	Machtsverheffing . .	Worteltrekking Logarithmeneming

Aan verschillende voorbeelden wordt nu gedemonstreerd, dat vermenigvuldiging en deling distributief zijn t. o. v. de optelling en de aftrekking en dat de machtsverheffing het wel is t. o. v. de vermenigvuldiging en de deling, doch niet t. o. v. de optelling en de aftrekking. Het laatste wordt te zijner tijd nog eens herhaald bij de worteltrekking en nog later bij de logarithmeneming, waarbij er uiteraard de aandacht op gevestigd wordt, dat bij deze bewerking van volledige distributiviteit niet gesproken mag worden. Uit al deze voorbeelden wordt dan de m. i. zeer sprekende en zeer eenvoudige regel getrokken, die in elk voorkomend geval weer gehanteerd kan worden:

Elke bewerking van hogere orde is distributief t. o. v. de beide bewerkingen van naastlagere orde en ook t. o. v. die alleen.

Wordt dit aan een voldoend aantal voorbeelden toegelicht en is ook het aantal toepassingen voldoende, dan blijven op de duur fouten uit als

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \text{ of } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Een twede geval, waarbij een goed inzicht in het schema der bewerkingen diensten kan bewijzen, om fouten te vermijden, is de toepassing van de verschillende eigenschappen der machtsverheffing, met name de eigenschappen:

1 — $a^n \times a^m = a^{n+m}$
2 — $a^n : a^m = a^{n-m}$
3 — $(a^n)^m = a^{nm}$
4 — $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$

Door mij zijn deze stellingen in de klasse steeds op de volgende wijze in eenvoudige voor kinderen begrijpelike taal geformuleerd:

De verschillende bewerkingen bij de machtsverheffing gaan, op de exponenten toegepast, alle een stapje terug.

Allesbehalve exakt? Toegegeven, maar ...... het wordt begrepen en de gewone fouten blijven uit, spesiaal, waar de exponenten letters zijn. En in de twede en derde klasse blijven de fouten ook uit bij de behandeling der oneigenlike exponenten.

Het schema der bewerkingen kan nog een derde dienst bewijzen, nl. bij de ontwikkeling der verschillende symboliese getalsoorten. Aan dit laatste ontkomen we eenvoudig niet, omdat de bewerkingen met de diverse symboliese getallen het grootste deel vormen van ons algebraonderwijs. Ik zou me echter hierbij slechts tot het allernoodzakelikste willen beperken en niet, zoals prof. Schuh wil, (zie Euclides IV, pag. 202) reeds in de eerste klasse het volledige getallenschema geven, met de opmerking, dat sommige der daarin genoemde getalsoorten eerst later besproken zullen worden. Ik zou me in deze willen aansluiten bij de opvatting van de heer Beth, die in de eerste klasse hierbij niet verder wil gaan dan tot de breuken. Ook zou ik als hij de afbeelding wensen op de getallenrechte. (Zie Euclides V, pag. 278 enz.). Wie weet, hoeveel moeite vele kinderen hebben, alvorens ze enigermate vertrouwd zijn met het begrip der negatieve getallen, die zal zich zelf geen moeite sparen, om te trachten, ze zo spoedig mogelik aan het juiste begrip te helpen.

Tot zover mijn voorbeelden ter verduideliking van mijn ideeën omtrent hetgeen wij in afwachting van het psychologies gefundeerde leerboek zouden kunnen geven, om een vruchtdragend algebra-onderwijs mogelik te maken. Het is nu eenmaal voorlopig niet te vermijden, dat wij daarbij vrijwel geheel op onze eigen intuitie moeten „dichtvaren" t. a. v. hetgeen de leerlingen aan wiskundige strengheid in elk klasse hebben kunnen. We zullen daarbij fouten maken, doch deze zijn voor mij altijd minder ernstig dan die welke resulteren uit de instelling, dat er bij de intrede in de M. S. voor de kinderen een „nieuw leven" dient te beginnen.

Op één kwestie wil ik nog de aandacht vestigen. Het wordt voorstanders van opvattingen als de mijne verweten, dat ze het

de kinderen te gemakkelik willen maken en dat ze alle geestelike inspanning van hen willen wegnemen. Hoe groot de misvatting is, die bij dergelike verwijten tot uiting komt, wil ik in het volgende duidelik maken. Ik zou daartoe bijna het verwijt wel willen omkeeren. Ik wil juist wèl van de kinderen de volle 100 % aan geestelike inspanning, *doch dan ook alleen die insapnning, waartoe ze in staat zijn.* En met die wens kom ik ongetwijfeld verder dan diegenen, die de kinderen willen belasten met dingen, die te zwaar voor ze zijn.

Ik ben van mening, dat het in zijn algemeenheid zeer twijfelachtig is, wat de hr. Dijksterhuis zegt in zijn voordracht voor de Groningse studenten, nl. dat er een natuurlike neiging zou bestaan „het denkvermogen zo weinig mogelik in werking te brengen". (Zie Euclides X, pag. 177).

Er is een natuurlike neiging, zich te onttrekken aan denkarbeid, die de belangstelling niet heeft, waarvan het nut niet wordt begrepen en die te zwaar is voor het kinderlik denkvermogen. Dat blijkt overduidelik uit de resultaten van de schoolenquête van Heymans en Wiersma. De 35 % apathen en amorphen spreken in dat opzicht een te duidelike taal.

Wek de belangstelling, doe het nut inzien — de vraag naar het nut is daarom geenszins een „ergerlike" vraag! — en bovenal, belast de kinderen niet met denkwerk, waarvoor ze voorlopig het vermogen missen en de passiviteit verdwijnt. Dan zijn ze wel bereid tot extra en soms zelfs zeer zware denkarbeid.

Eens heb ik in een verloren ogenblik in een twede klasse het volgende vraagstukje opgegeven, dat op zichzelf een monstrum is, maar meer bedoeld was als puzzle:

„Bim is 2 maal zo oud als Bam was, toen Bim zo oud was als Bam nu is. Als Bam zo oud zal zijn als Bim nu is, dan zal Bim 60 jaar zijn. Hoe oud is elk tans?"

Ik heb er wat grapjes bij verkocht, heb de jongens gezegd, dat ze het „toch" niet konden vinden en dat ze het, als ze het niet vinden konden, „gerust" aan hun vader mochten vragen, enz. Het resultaat was verrassend. Er waren jongens, die er de halve nacht voor opgezeten hadden en...... verschillende hadden de oplossing gevonden.

Het is niet waar, dat er een natuurlike neiging bestaat, om denkarbeid te schuwen. Wek de belangstelling en stel ze niet voor onmogelik werk en ze zijn bereid, de zwaarste inspanning op zich te nemen.

Het is juist de kunst, de bereidheid tot die inspanning te wekken!

De vraag om het psychologies gefundeerde wiskundeboek en het afwijzen van exakt onderwijs in de lagere klassen vormen tezamen gèèn pleidooi voor verslapping. Integendeel! Het is mijn overtuiging, dat slechts langs deze weg de fakulteiten vrij komen, die juist een zo groot mogelike inspanning mogelik zullen maken. Het verheugende is, dat die inspanning dan ook met graagte wordt aanvaard.

Juist nù is er verslapping — denk slechts aan de 35 % apathen en amorphen. Omdat een kind op een taak, die voor hem onmogelik is, met verslapping reageert. Dan wel zich de onmogelikste geheugenarbeid getroost, om er nog wat van terecht te brengen. Bekend is, dat er kinderen zijn, die tot ongelooflike prestaties op het gebied van geheugenwerk in staat zijn.

Men behoorde niet te gauw te spreken van denktraagheid. Van nature is de mens niet denktraag, mits de voorwaarden vervuld zijn, die ik hier boven aangaf. Welnu, voor die voorwaarden zullen wij op de duur mede kunnen zorgen. Mits we meer acht gaan geven op het kind zelf en de eigenaardigheden der kinderlike psyche en minder blijven vastkleven aan de eisen van het vak.

Het geroep van verslapping zal dan verstommen. Doordat men zal opmerken, dat op de manier, zoals ik het wil, de volle 100 % aan inspanning verkregen kan worden, terwijl op de wijze van hen, die *meer* willen, er steeds *minder* voor de dag komt.

Per saldo toch is slechts het sukses het allesbeslissende!

Ik kom tot een einde van dit zeer uitvoerige betoog. Ik kon het moeilik korter houden, omdat deze dingen spesiaal in de kringen der wiskundeleraren tot nog toe zo weinig gezegd zijn en m.i, toch eens noodwendig gezegd moesten worden. Omdat ik weet, dat velen er in hun hart evenzo over denken als ik, maar geen uitweg zien, om uit de gaandeweg onmogelik geworden toestand van nu weg te komen.

Als men maar eens begon in te zien, dat een groot deel van de

mislukking van de H.B.S. als „algemeen ontwikkelend" onderwijsinstituut neerkomt op onze hoofden. Dan zou de bereidheid wel komen, om mee te werken, tot het brengen van de hoognodige verandering. Er moet weer eenheid komen in de opvattingen van het korps wiskundeleraren omtrent het door hen te geven onderwijs. Die eenheid is nu zoek. Ze zal gevonden moeten worden niet in de richting van wat we wel graag zouden *willen,* maar wat we *kunnen* onderwijzen.

Daarbij kunnen we de hulp van de psychologen van professie niet missen. Ik zal verheugd zijn, als er over de door mij ontwikkelde denkbeelden de nodige diskussie ontstaat, nog meer verheugd zal ik zijn, als velen gaan begrijpen, dat we hier voor een terrein staan, waarvan we nog heel weinig afweten. Ik voor mijzelf wil gaarne onmiddellik toegeven, dat ik het zelf ook nog helemaal niet weet.

Alleen, het steeds maar moeten blijven voortdrijven op mijn intuïtie, is iets, wat me al lang niet meer bevredigde. Ik geloof, dat we daaruit kunnen komen. Dat zal echter moeten geschieden door wetenschap en door wetenschap alleen. Ik ben al tevreden, als dat slechts begrepen wordt. Geen groter sukses zou ik daarom op dit artikel willen verwachten, dan dat er een blijvend kontakt ontstond tussen de wiskundigen en de psychotechniese instituten in ons land. Dat kontakt kan ons het wiskundeonderwijs brengen, waaraan zo grote behoefte bestaat.

Bandoeng, Juni 1934. B. Coster.

Ondergetekende, abonné op { Nieuw Archief voor Wiskunde / „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" / „Euclides"

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

DE VRIES, HISTORISCHE STUDIËN DEEL II

Ing. à f 3.00. Gewone prijs is f 3.75.
Geb. à - 3.75. „ „ „ - 4.50.

direct per post, ...

door bemiddeling van den boekhandel..

....

Naam: Woonplaats:

....

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld vóór 1 Mrt. 1935, voor Indië vóór 1 Mei, 1935. s.v.p. doorhalen wat **niet** wordt verlangd.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

1½ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

GRONINGEN.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

PROBLEMEN DER INVARIANTENTHEORIE

DOOR

Dr. G. F. C. GRISS.[1])

Invariantentheorie heet het gebied der wiskunde, waarover ik U heden spreken zal. Op 1 Juni 1921 hield Prof. Weitzenböck te Amsterdam een voordracht over hetzelfde onderwerp. In de sedert dien verloopen jaren heeft zich de Invariantentheorie echter zoodanig uitgebreid, dat ik niet in een herhaling behoef te vervallen.

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld uit de meetkunde wil ik beginnen U de methode der Invariantentheorie uiteen te zetten.

Van de verschillende eigenschappen van de kegelsneden, zooals de brandpuntseigenschappen, die der middellijnen en die der polaire verwantschap, blijven alleen de laatste bij centrale projectie behouden, d. w. z. bij centrale projectie gaan een kegelsnede met pool en poollijn in een nieuwe kegelsnede met pool en poollijn over, terwijl een brandpunt van de oorspronkelijke kegelsnede in het algemeen niet in een brandpunt van de nieuwe zal overgaan. Het methodisch opsporen der invariante eigenschappen van gegeven figuren bij bepaalde transformatie's is het onderwerp der Invariantentheorie.

De kegelsnede wordt daarbij gegeven door de coëfficienten van zijn vergelijking, pool en poollijn door hun coördinaten, terwijl met een centrale projectie een projectieve transformatie overeenkomt. Deze projectieve transformatie's vormen een z.g.n. groep, en inducееren transformatieformules voor de coëfficienten der kegelsneden en der lijncoördinaten. Invariante eigenschappen worden gegeven door het nul-zijn van invarianten, dit zijn functie's van de coëfficienten en coördinaten, die voor en na transformatie slechts in een factor verschillen, die alleen van die transformatie afhangt. We komen zoo tot het formuleeren van het

[1]) Openbare les, gehouden 29 October 1934 te Utrecht.

probleem der projectieve invariantentheorie: Gegeven is de groep der projectieve transformatie's van een projectieve n-dimensionale ruimte en één of meer vormen in puntcoördinaten, eventueel ook in lijncoördinaten (van Plücker), vlakcoördinaten, enz. Bepaald wordt met de z.g.n. symbolische methode een vol invarianten-systeem, d.w.z. een kleinste systeem van geheele rationale invarianten, waarin alle andere geheel en rationaal zijn uit te drukken. Opgelost is dit probleem eerst voor binaire vormen door Gordan, daarna voor n-naire vormen, waarbij de coëfficienten symmetrisch in de verschillende indices zijn, en ten slotte voor alterneerende vormen (en daardoor voor willekeurige) door middel van de z.g.n. complex-symbolen door Prof. Weitzenböck. Van een volledige oplossing van het probleem kan men pas dan spreken, als een bovenste grens voor het aantal invarianten van het volle systeem is aangegeven. Ook dit is echter gedaan, al is het aangegeven aantal zeer veel grooter dan het werkelijke aantal, dat in een eenigszins ingewikkeld geval ook reeds zeer groot is. Slechts één moeilijkheid blijft er nog voor de symbolische methode, nl. het geval, dat er tusschen de coëfficienten der gegeven vormen bepaalde invariante betrekkingen bestaan, en wel betrekkingen, die door het nul-zijn van niet-lineaire vormen worden gegeven.

In plaats van een vol systeem te bepalen kan men zich ook beperken tot het bepalen van een algebraïsche basis, d.w.z. een systeem van onafhankelijke invarianten waarin alle algebraïsche invarianten zijn uit te drukken. Is een vol systeem bekend, dan is het niet moeilijk hieruit een algebraïsche basis te bepalen. De directe bepaling van een algebraïsche basis gaat door middel van eliminatie van de transformatie-coëfficienten. Het eenvoudigste geval doet zich voor, als deze coëfficienten zich laten oplossen, maar ook zonder dat ze opgelost kunnen worden, kunnen ze soms geëlimineerd worden. Toch behoeft eliminatie niet onmiddellijk de invarianten te geven. Bovendien moet men reeds van te voren met de mogelijkheid van invariante relatie's rekening houden, in welk geval de eliminatie weer anders kan verloopen. Men lost hiermee dan tegelijk het z.g.n. aequivalentieprobleem op.

Terwijl ik tot nu toe steeds over de projectieve groep sprak, kan men even goed een of andere ondergroep aan zijn beschouwingen ten grondslag leggen, bijv. de bewegingsgroep der Eucli-

dische meetkunde of der niet-Euclidische meetkunde of de groep der orthogonale transformatie's. Bij iedere groep behoort op deze wijze een invariantentheorie. Terwijl van de meest bekende ondergroepen der projectieve groep de invariantentheorie reeds langer bekend was, is onlangs door Prof. Weitzenböck voor iedere ondergroep het bestaan van een vol invariantensysteem in de bovengenoemde beteekenis bewezen, terwijl ook een bovenste grens voor het aantal invarianten gegeven is. Hiertoe werd o.a. gebruik gemaakt van de indeeling der eindige continue groepen van Lie door E. Cartan. Toepassing van deze theorie voor bepaalde ondergroepen is zeer belangrijk. Hierop kom ik straks nog terug.

Het tot nu toe besprokene kan beschouwd worden als een uitwerking van het Erlanger Programm van Klein, waarvan ik de bekendste en belangrijkste passage citeer: „Es ist eine Mannigfaltigkeit gegeben und in derselben eine Transformationsgruppe; man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie, d.h. man untersuche die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften, die durch die Transformation der Gruppe nicht geändert werden."

Andere groepen, die hieronder vallen en die ik slechts voor de volledigheid vermeld, zijn de niet-lineaire eindige continue groepen, waarbij de graad van een vorm (een z.g.n. numerieke invariant bij lineaire transformatie's) in het algemeen niet onveranderd blijft, en de groep van alle eeneenduidige continue transformatie's, dus de groep van de analysis situs; dat hierbij het dimensiegetal een numerieke invariant is, is 't eerst door Prof. Brouwer bewezen.

Het tweede onderwerp, dat ik nog eenigszins uitvoerig wil bespreken, is de tensoranalyse of het gebied der differentiaalinvarianten. Het staat sedert het ontstaan van de algemeene relativiteitstheorie in het middelpunt der belangstelling. Men gaat uit van de groep der eeneenduidige en een voldoend aantal keeren differentieerbare transformatie's in n veranderlijken. Er worden nu grootheden ingevoerd, vectoren en tensoren (ook affinoren genaamd), waarvan de transformatie's afhangen van de transformatie's der differentialen der oorspronkelijke veranderlijken. Het bepalen der invarianten dezer grootheden komt op hetzelfde neer als het bepalen der invarianten der projectieve groep, waarover wij zooeven spraken.

Veronderstel nu echter, dat de componenten der tensoren differentieerbare functie's der veranderlijken zijn, dan blijkt, dat hun afgeleiden zich niet als tensoren transformeeren. Men kan nu naar analogie van de projectieve invariantentheorie bij gegeven tensoren vragen naar een vol systeem van differentiaalinvarianten van de eerste orde, d.w.z. een systeem van geheele rationale differentiaalinvarianten van de eerste orde, waarin alle andere geheel en rationaal zijn uit te drukken.

Van de oplossing van dit probleem is nauwelijks een enkel geval bekend. Daar de transformatie's der tensoren en hun afgeleiden alle lineair zijn, moet echter de voor kort ontwikkelde theorie van Prof. Weitzenböck, die ik zooeven noemde, hier van toepassing zijn. Hetzelfde geldt voor het bepalen der differentiaalinvarianten van 2de en hoogere orde.

Wil men zich niet beperken tot een bepaalde orde, dan zou men een systeem van geheele rationale differentiaalinvarianten moeten opstellen, waaruit alle andere zijn af te leiden door differentiatie en vorming van geheele rationale functie's.

Tot nog toe heeft men zich steeds tot eenvoudigere problemen beperkt en wel in hoofdzaak tot het bepalen van z.g.n. reductiesystemen, waarbij men van het geheel-rationaal-zijn afziet. Hieronder verstaat men het volgende: De coëfficienten der transformatievergelijkingen der gegeven tensoren zijn de eerste afgeleiden van de oude naar de nieuwe veranderlijken in de oorspronkelijke coördinatentransformatie. De transformatievergelijkingen van de afgeleiden der tensoren bevatten dus de 2de afgeleiden. Het blijkt nu, dat een geschikte eliminatie dezer 2de afgeleiden tot transformatievergelijkingen van nieuwe tensoren voert, waarmee het bepalen der differentiaalinvarianten teruggebracht is tot een probleem der algebraïsche invariantentheorie, nl. het bepalen der projectieve invarianten van het reductiesysteem, dat de gegeven tensoren en die nieuwe omvat. Hoewel deze methode in vele gevallen zonder moeilijkheden toegepast wordt, ontbreekt een algemeen bewijs, dat de genoemde eliminatie der 2de afgeleiden steeds tot tensoren kan voeren. Het verst gaat een ontwikkeling van Emmy Noether, die echter voor vectoren niet geldt, voor tensoren van hoogere dan de 2de rang nooit is toegepast en overigens hoogstens onder beperkende voorwaarden geldt voor symmetrische tensoren.

In ieder afzonderlijk geval is het van het meeste belang te onderzoeken of de eliminatie der 2de afgeleiden kan geschieden door oplossing ervan uit een gedeelte der transformatievergelijkingen. Is dit mogelijk, dan blijkt deze oplossing altijd dezelfde vorm te hebben, zonder dat ook hier een bewijs geleverd is, dat dit noodzakelijk is. Met behulp hiervan kan men dan de afgeleiden der tensoren vervangen door de z.g.n. covariante afgeleiden, die de tensoreigenschap wel hebben. Men komt zoo tot ruimten met z.g.n. affiene samenhang. Ziet men hierbij nu af van de gegeven tensoren, dan kan de affiene samenhang op zichzelf beschouwd worden, die bijv. al of niet een kromming of een torsie kan hebben.

Deze theorie der lineaire overbrengingen heeft zich ontwikkeld uit de relativiteitstheorie en differentiaalmeetkunde. Uitbreidingen zijn afkomstig o.a. van Prof. Schouten, terwijl Van Dantzig er in geslaagd is de verschillende theorieën in één enkele samen te vatten door het invoeren van homogene coördinaten. De bovengenoemde tensoranalyse bevat gevallen, waarin zeker geen lineaire overbrenging aanwezig is, terwijl er wel differentiaalinvarianten zijn. Aan de andere kant zijn er lineaire overbrengingen, die niet bij de genoemde tensorrekening voorkomen. De twee gebieden vallen dus gedeeltelijk over elkaar heen. In ieder geval mag het begrip differentiaalmeetkunde niet met één dezer gebieden geïdentificeerd worden. Het Erlanger Programm behoeft echter slechts een aanvulling om alle genoemde ontwikkelingen te omvatten. De grootheden, die beschouwd worden kunnen nl. tot verschillende gebieden, elk met hun eigen transformatiegroep behooren. „L'importance de la notion de groupe n'est pas réduite par les développements récents de la géométrie différentielle; il semble même qu'elle seule au contraire soit capable de les embrasser dans une même synthèse." (Cartan)

We gaan nu nog even terug tot de gewone of Euclidische differentiaalmeetkunde. In een drie- of meerdimensionale ruimte met een Euclidische bewegingsgroep denken we ons een oppervlak op de bekende wijze gegeven door middel van 2 parameters. Deze worden onderworpen aan de groep der eeneenduidige differentieerbare transformatie's. De grootheden der gewone differentiaalmeetkunde zijn dus differentiaalinvarianten of -covarianten t.o.v. deze twee groepen. Laten we complexe coördinaten toe, dan kan

zich vanaf de 5de dimensie het merkwaardige geval voordoen, dat de metrische fundamentaaltensor van het oppervlak identiek nul is. Deze z.g.n. ametrische vlakken zijn onderzocht door Lense en Pinl. Met behulp van de tensorenanalyse slaagt men er in een quasimetriek in te voeren, die berust op een fundamentaaltensor van de 4de i.p.v. de 2de rang.

Vervangt men de Euclidische groep door een andere, bijv. de affiene of de projectieve, dan ontstaan de affiene differentiaalmeetkunde (Blaschke) en de projectieve. Laat men nu ook het lineair-zijn van de gegeven ruimte vervallen, d.w.z. het lineair-zijn van de eerstgenoemde transformatiegroep, dan krijgt men de Riemannsche meetkunde en zijn uitbreidingen, waarover wij zooeven spraken. Hiertoe behooren ook de verschillende relativiteitstheorieën, waarvan het doel is de geheele theoretische natuurkunde tot één samenhangend geheel te maken, het unificeeringsprobleem der natuurkunde.

BOEKBESPREKINGEN.

H. Turkstra. Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School, ondertitel „Wat heeft de Psychologie voor de Wiskunde te zeggen?" J. B. Wolters, Gron. '34.

Het eerste hoofdstuk draagt tot opschrift: „De logische en de psychologische kant van de behandeling en de beoefening van de wiskunde." De schrijver toont aan de hand van uitspraken van Brouwer en Hilbert aan, dat aan de wiskunde niet uitsluitend een logische kant is, dat eerstgenoemde zelfs deze logische kant op bepaalde punten disputabel stelt, en dat daarmee sinds betrekkelijk korte tijd ook een psychologische kant van de behandeling, de beoefening en in beperkte zin ook van de opbouw van de wiskunde de aandacht is gaan trekken.

Wanneer ik in dit eerste hoofdstuk niet steeds met den schrijver accoord kan gaan, dan geloof ik, dat dit meer een gevolg is van zijn wijze van uitdrukken dan dat ik het niet met zijn bedoeling eens zou zijn. Hij laat m.i. niet voldoende duidelijk uitkomen, dat de logica en de psychologie van de wiskunde beide afzonderlijk recht van bestaan hebben, en dat zij nooit met elkaar in tegenspraak kunnen komen. Tegenover de psychologie als wetenschap van het menschelijk denken staat de logica als leer van het, geldigheden voortbrengend, wetenschapsproces. Kant zegt (Logik, p. 6): „Wir wollen in der Logik nicht wissen, wie der Verstand ist und denkt und wie er bisher im Denken verfahren ist, sondern wie er im Denken verfahren sollte." Probleemstelling zoowel als methode van beide zijn geheel verschillend. Een tegenspraak tusschen logica en psychologie is dus steeds tot een grensoverschrijding van een van beide terug te brengen. Zulke grensoverschrijdingen komen in de praktijk voor, o.a. op het terrein van het grondslagenonderzoek. Oorzaak is, dat het zoogenaamde grondslagenonderzoek zoowel de logica als de psychologie van de wiskunde omvat; het gevolg hiervan kan zijn, dat zuiver logische problemen psychologisch ingekleed worden.

Het eerste hoofdstuk behandelt ook het onderwijs in de meetkunde. De schrijver bespreekt hier terecht uitvoerig de belangrijke gedachtenwisseling, die ongeveer tien jaar geleden gevoerd werd tusschen Mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis. Ik kan hem niet toegeven, dat het hier ging tusschen een psychologische behandeling van de wiskunde eenerzijds, een logische anderzijds; ik geloof, dat hij door deze voorstelling beide didactici onrecht doet. De tegenstelling psychologie-logica, dus de tegenstelling: „wie er bisher im Denken verfahren ist" en „wie er im Denken verfahren sollte", maar tevens de groote beteekenis van beide is voor niemand zoo duidelijk als voor den docent. Voor de psychologie maakt het geen onderscheid, of de voorstellingen van een persoon geldige of ongeldige oordeelen inhouden, en nog

minder, waaraan die oordeelen hun geldigheid dan wel hun ongeldigheid ontleenen, maar alleen, door welke oorzaak deze voorstellingen ontstaan, en welke gevolgen zij hebben voor het handelend optreden. Voor de logica zijn ongeldige oordeelen van geen waarde. Aan het onderwijs stellen zoowel logica als psychologie haar eischen, de eerste vooral, wat het gehalte van de geboden stof, de tweede in hoofdzaak, wat de wijze van behandeling betreft.

De schrijver had het recht te zeggen, dat Mevrouw Ehrenfest in haar betoog de nadruk legde op de psychologische vraag, Dijksterhuis op de logische. Maar er bestaat eenerzijds niet de minste twijfel, of Dijksterhuis is geheel doordrongen van de beteekenis van het psychologische probleem, en hij onderschrijft met overtuiging de stelregel, dat *wat* en *hoe* onderwezen moet worden, in de eerste plaats bepaald moet worden door het ontwikkelingsstadium van het kind; en anderzijds is het zeker, dat Mevrouw Ehrenfest de groote waarde van het stelselmatige meetkunde-onderwijs ten volle erkent. Ik heb de indruk gekregen, dat het meeningsverschil van beide didactici voor een groot gedeelte terug te brengen is tot het verschil in leerlingen-materiaal, dat zij zich voor oogen gesteld hebben; een groot aantal van de door Mevrouw Ehrenfest mede bedoelde leerlingen komen naar de meening van Dijksterhuis voor het ontvangen van meetkunde-onderwijs op grond van hun gemis aan intellect niet in aanmerking.

In het tweede hoofdstuk komen aan de orde de vraag van „de wiskunde-overdracht" en die van „het leeren wiskunde-denken". De lezing wordt hier bemoeilijkt door de omstandigheid, dat de schrijver twee van elkaar onderscheiden problemen tegelijk behandelt, en ze niet duidelijk uit elkaar houdt; bovendien gebruikt hij drie termen, waarvan ik niet steeds kan zien, of zij als synoniemen beschouwd worden dan wel als uitdrukkingen voor verschillende, wellicht zelfs tegenover elkaar geplaatst gedachte, begrippen. Deze termen zijn: „logisch denken", „wiskundig denken", „wiskunde denken". De bedoelde problemen zijn die, welke beide met de term „transfer" of „overdracht" aangeduid worden, en wel 1e de vraag, of het vermogen van redeneeren, dat men zich door studie van bepaalde vakken eigen gemaakt heeft, zich tot het gebied van die vakken beperkt, of niet; en 2e de vraag, of men op iemands redeneervermogen van buiten af invloed kan uitoefenen, of niet. De schrijver haalt de voornaamste literatuur uit binnen- en buitenland aan en geeft aan het slot van het hoofdstuk zijn eigen meening. Ik moet verklaren, dat ik het niet anders dan teleurstellend kan noemen, als deze, blijkbaar als resultaat van grondige studie, en als antwoord op de tweede vraag, aldus moet worden uitgesproken: „*Die* methodes moeten worden gebezigd en *die* stof moet worden behandeld, die op zekeren leeftijd *resonantie* vertoonen met het psychische niveau, die daarop m.a.w. zijn „afgestemd"". Men mag toch aannemen, dat hij ook zonder grondige studie van die literatuur zonder groote moeite tot dit inzicht had kunnen komen. De op de geciteerde volzin volgende opmerking, die hierop neerkomt, dat men *niet iedereen* wat leeren kan, zal voor weinig docenten nieuws bevatten. Ook had de „zelfbekentenis", die de schrijver hierna nog geeft, achterwege kunnen blijven; indien het een voortreffelijk leermeester *niet* gelukken zou,

iemand, die zich tot de wiskunde-studie getrokken voelt, iets op zijn gebied bij te brengen, dan zou de afschaffing van alle wiskunde-onderwijs het eerste punt moeten zijn op elk bezuinigingsprogram.

De bedoelde teleurstelling mag echter niet onbillijkheid ten gevolge hebben. Het belangrijkste gedeelte van de studie komt namelijk pas in het derde hoofdstuk, waarin „de ontwikkeling van het logisch denken bij het kind" aan de orde komt. Dus: „wie er (es) bisher im Denken verfahren ist". De schrijver behandelt hier de ontwikkelingsgang van het logisch denken van het kind in de loop der jaren, en bespreekt vragen als de volgende: op welke leeftijd kunnen kinderen eenigszins met abstracties werken? wanneer kan men met vrucht aanvangen met het wiskunde-onderwijs? wordt bij het wiskunde-onderwijs in de laagste klassen van de middelbare school in voldoende mate rekening gehouden met de psychologische gegevens?

In de eerste plaats komt het redeneeren met praemissen; ten opzichte van dit probleem bestaan geheel tegenstrijdige meeningen. Naast de meening van Meumann, dat kinderen vóór hun 14e levensjaar geen logische gevolgtrekking kunnen maken, staan de daarvan afwijkende van Stern en Schlüszler. De schrijver deelt de onderzoekingen van dezen laatsten onderzoeker uitvoerig mee, evenals de conclusies, die uit zijn curven te trekken zijn, waarbij vooral het verschil tusschen het gedrag van de jongens en de meisjes opvalt.

Het is bekend, dat de meeningen zeer verschillend zijn ten aanzien van de vraag, of men aan de conclusies van Schlüszler waarde mag toekennen vóór de beoordeeling van de ontwikkelingsgang van het denken in algemeene zin. Reindersma heeft op die vraag een ontkennend antwoord gegeven. Turkstra is het met hem niet eens en wil aan de onderzoekingen wel groote waarde hechten, zij het onder zekere reserves; hij beroept zich o.a. op de uitkomsten van de bekende school-enquête van Heymans en Wiersma.

Zonder hierop verder te willen ingaan, kan ik niet nalaten er de aandacht op te vestigen, hoezeer weer uit de geschetste onderzoekingen blijkt, dat men zich bij het spreken over het „logische" denken niet goed los kan maken van de syllogismen van Aristoteles. Men neemt ze als uitgangspunt, alsof met die sluitreden over de grondslagen van de leer van het denken het laatste woord gesproken zou zijn. Echter hebben onderzoekingen van de logistische school en, in andere richting, van Brouwer doen zien, dat dit volstrekt niet het geval is. De wetten van Aristoteles bleken niet voldoende te zijn voor een strenge fundeering van de formeele logica, terwijl het zeer de vraag is, of het niet mogelijk is, dat de wetten van de formeele logica evenzeer als de wetten op ander gebied van wetenschap aan veranderingen met de tijd onderhevig zijn. Reeds op grond van deze overwegingen zou men inderdaad neiging kunnen gevoelen, de waarde van de bedoelde onderzoekingen, op grond van ondeugdelijkheid van het uitgangspunt, in twijfel te trekken.

Aan het slot van het hoofdstuk leest men:

„Het vorenstaande verleent in geen geval steun aan de vaak geuite meening, dat het wiskunde-onderwijs op de Middelbare school te vroeg aanvangt. Integendeel, er mag gerust, zooals tot nog toe 't geval

was, op de 12- à 13-jarige leeftijd worden begonnen met wiskunde onderwijs. Echter wijst het onloochenbaar (? B.) geconstateerde feit van de intelligentiestilstand bij het 13e en 14e levensjaar en voorts ook het nog niet rijp zijn van den kinderlijken geest op dien leeftijd voor logische deducties (? B.) er op, dat wij voorzichtig moeten zijn met een al te abstract *inzetten* van dat wiskunde-onderwijs".

De schrijver laat hierop volgen, hoe hij zich het onderwijs in de Rekenkunde in de lagere klassen voorstelt. Hij steunt hierbij op geconstateerde psychologische feiten (zie boven). Wanneer men nu echter in des schrijvers brochure ziet, hoe tegenstrijdig de meeningen zijn aangaande de waarde, die men aan verschillende uitspraken mag toekennen, dan wordt verklaarbaar „een zekere afkeerigheid van psychologische oriënteering bij vraagstukken van didactiek", die de schrijver bij opvoeders heeft opgemerkt (blz. 36). Hij schrijft die afkeer toe aan „het niet kennen van de psychologie en paedagogie als wetenschap". Ik geloof, dat hij hier onbillijk wordt, evenals zoo vele anderen het waren, die vóór hem den docenten bij het middelbaar onderwijs onverschilligheid voor en onbekendheid met de psychologie verweten hebben. Uit het feit, dat weinigen van hen op dit gebied publiceeren, mag men niet opmaken, dat bij hen geen belangstelling zou bestaan voor hetgeen op psychologisch gebied gedaan wordt. Als ik het goed zie, dan betreft hun „afkeerigheid" niet de psychologische bezinning, maar wel de voorbarigheid, waarmee sommigen hun hervormingsplannen willen doen steunen op psychologische gegevens, die, op het zachtst uitgedrukt, nog zeer aanvechtbaar zijn.

Op de beide laatste hoofdstukken, die de beide groote aansluitingsproblemen en de paedagogisch-didactische vóóropleiding van den wiskundeleeraar behandelen, zal ik niet meer ingaan.

Het feit, dat ik enkele malen kritiek moest uitoefenen (op vele punten ben ik het met Turkstra eens), geeft mij aanleiding ten slotte nog even vast te stellen, dat ik van oordeel ben, dat de schrijver met de samenstelling van deze brochure een nuttig en verdienstelijk werk verricht heeft. Men vindt hier in een klein bestek de hoofdpunten van de voornaamste onderzoekingen op het bewuste gebied vereenigd en voldoende literatuur voor verdere studie aangewezen (toch nog een opmerking: bij bijna alle geciteerde werken ontbreekt zoowel jaartal als uitgever). Het werkje is onderhoudend geschreven. Moge het vele lezers vinden.

Deventer H. J. E. Beth.

Leerboek der Natuurkunde voor de kweekscholen door *Ir. E. S. Levison* en *Ir. E. D. G. Frahm,*
Deel II (*P. Noordhoff* N.V. - 1934, Groningen - Batavia.)

Over de verschijning van het eerste deel van dit leerboek werd in *Euclides* (10e Jaargang, No. 2 en 3) vrij uitvoerig bericht. Het juist verschenen tweede deel behandelt de afdelingen Geluid en trillingen, Licht, Magnetisme en Electriciteit. In 't voorbericht bij dit deel wordt de opzet er van, speciaal voor wat de electriciteit betreft, gemotiveerd.

Leerstof en behandelingswijze verschillen niet zo heel veel van wat men in soortgelijke leerboeken gewoonlijk aantreft.

Evenals het eerste toont ook het tweede deel een beknoptheid, die aangenaam aandoet. Jammer echter, dat er nog al heel wat slordigheden in staan. Zou de gebruiker van dit boek van begrippen als chromatische toonladder, zuivere toon, richting van een krachtlijn, zoals deze hier worden gegeven, wel een heldere voorstelling krijgen? Wat denken de schrijvers zelf van hun formulering van de wet van Snellius (nogwel cursief gedrukt) en van een definitie (?) van kilowatt-uur, zoals die voorkomt op blz. 129? We willen niet te veel nadruk leggen op de vele ongebruikelijke afkortingen en schrijfwijzen van verschillende eenheden, die de schrijvers bezigen. Daartegenover staat van enkele onderwerpen wel een duidelijke behandeling (b.v. §§ 11 en 12).

Maar wat te denken van de wijze, waarop in de spiegel-formule (voor de bolle spiegel) de negatieve grootheden worden ingevoerd? Geen sprake van, dat de lezer ervaart, hoe uitbreiding van het getalbegrip aan sommige uitspraken grotere algemeenheid geeft (dat aldus de noodzakelijkheid van die uitbreiding zich veelal opdringt). Neen, de lezer „*moet*" hier bepaalde afstanden negatief rekenen, omdat hij andere positief nam. (Zo ongeveer staat 't er.) Maar bij $-\frac{b}{v}$ moet 't teken maar weer weg.

Jammer dat de schrijvers—die toch heus ook wel aardige dingen geven—hun arbeid niet met wat meer zelfcritiek hebben verricht.

Dr. J. F. de Vries.

Leerboek der Natuurkunde, bestemd voor het middelbaar, voorbereidend hooger en propaedeutisch onderwijs door *Dr. W. J. H. Moll* en *Dr. H. C. Burger;*

Tweede deel, Electrostatica, Magnetisme, De electrische stroom. Tweede druk. (*P. Noordhoff* N.V. - 1934 - *Groningen - Batavia).*

C'est une dévotion constante à la physique
(vrij naar *Debussy,* Monsieur *Chroce).*

Ik aarzel niet dit leerboek der natuurkunde—waarvan deel II in tweede druk hier wordt aangekondigd—een kunstwerk te noemen. Op iedere bladzijde haast voelt men, dat inspiratie dit werk deed schrijven.

Inspiratie, zonder welke geen kunstwerk (ook geen wetenschappelijk kunstwerk) tot stand komt. Rust, eenvoud en wetenschappelijke schoonheid zijn hier aanwezig. Het boek wekt door den geest, die er uit spreekt herinneringen aan dat andere beroemde studieboek: *H. A. Lorentz,* Beginselen der Natuurkunde. Dat werk, dat den lezer, hoe vaak hij 't ook raadpleegt, telkens nog weer nieuws biedt, dat altijd nog weer verrast door zijn diepte en veelzijdigheid.

Zo stel ik mij voor, dat het hier bedoelde werk eveneens heel lang de gids zal zijn van hen, die bij hun verdere studie met de physica in aanraking blijven; dat de gebruikers steeds zullen gevoelen, dat 't boek hun nog altijd iets te bieden heeft en dat ze 't niet spoedig ontgroeid zijn.

Hier zijn wetenschap en didactiek allergelukkigst verbonden. Niet dat soort didactiek, dat 't vak haast ondergeschikt maakt aan de „methode" en van het „uitleggen" de hoofdzaak maakt. Neen, een didactiek van andere orde: hier wordt de leerling gebracht tot de schoonheid der physische werkmethoden, tot de diensten, die de wiskunde biedt aan de physica, kortom tot de natuur zelve en de pogingen iets van haar te begrijpen, waarbij men steeds voelt, dat ook de schrijvers aarzelend en bewonderend staan tegenover haar raadselen. (En dat alles zo onopzettelijk en in zulke eenvoudige taal.)

Waarlijk, slechts zij, die zeer hoog boven de stof staan, kunnen zo schrijven.

Dr. J. F. de Vries.

E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.
P. Noordhoff N.V., Groningen-Batavia 1934.

In het voorbericht deelt de schrijver ons mede, dat hij zich, na 32 jaren lang colleges te hebben gegeven aan verschillende universiteiten, thans eindelijk rijp voelt, om zijn colleges over differentiaal- en integraalrekening uit te geven. Den ingewijde is de „Landau-stijl" bekend. In dezen stijl wordt thans de differentiaal- en integraalrekening „lückenlos" ontwikkeld, waarbij voortgebouwd wordt op het vroeger verschenen werk van den schrijver, getiteld: „Grundlagen der Analysis". In dit laatste heeft de schrijver, uitgaande van de axioma's van Peano de theorie van het reëele en het complexe getal „lückenlos" ontwikkeld, welke thans als bekend wordt verondersteld De schrijver gelooft daarmede een voor den beginnenden student doelmatigen weg te hebben gevonden, waarop hij alles kan leeren, wat hij in het verdere verloop „seines mathematischen oder physikalischen Lebens" uit de beginselen der differentiaal- en integraalrekening noodig heeft voor verdere studie.

Beschouwen we het werk eerst van zuiver mathematisch standpunt, dus zonder didactische overwegingen te laten gelden. Men zal dan moeten toegeven, dat het werkelijk tezamen met de „Grundlagen der Analysis" een „lückenlosen" opbouw van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening geeft, welke alleen op de axioma's van Peano rust. Geen enkel onderdeeltje, van welk bewijs ook, wordt aan den lezer overgelaten. Zelfs wordt den lezer op blz. 15 het tellen tot 10 bijgebracht (na het lezen van de „Grundlagen der Analysis" kan hij pas tot 2 tellen). De naam van den bekenden schrijver staat er ons borg voor, dat er van mathematisch standpunt niets op het werk zal zijn aan te merken.

Laat men echter ook didactische overwegingen gelden, dan doen zich spoedig enkele vragen voor. In de eerste plaats: acht de schrijver het doelmatig, dat een aankomend student in de wiskunde moet beginnen met de axioma's van Peano en dus achter elkaar eerst de „Grundlagen der Analysis" en daarna het thans hier besproken boek doorwerkt? Dat de schrijver inderdaad deze meening is toegedaan, wordt in het voorwoord wel niet gezegd, maar laat zich wel vermoeden

b.v. uit het feit, dat de hoofdstelling over de sneden van Dedekind wel wordt genoemd (als *stelling* en niet als *axioma!)*, doch, dat de sneden van Dedekind verder niet behandeld worden. Voordat de lezer aan het werk kan beginnen, moet hij dus eerst de theorie van de sneden van Dedekind ergens anders hebben geleerd. Hier sluit het boek precies aan de „Grundlagen der Analysis" aan. Toch wordt dit laatste werk niet in den tekst genoemd. Nu is er natuurlijk geen bezwaar tegen, om de theorie van het reëele getal uit een leerboek over differentiaal- en integraalrekening weg te laten, doch dan was zeker wel eenige toelichting noodig geweest op de hoofdstelling over de sneden van Dedekind.

In de tweede plaats komen in het werk geen meetkundige toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening voor. Deze zouden ook niet passen in het kader van den „lückenlosen" opbouw, tenzij men eerst een extra band zou wijden aan een axiomatische behandeling der elementaire meetkunde. Ook b.v. de meetkundige beteekenis van de afgeleide wordt dus niet vermeld, nog minder natuurlijk mechanische begrippen als snelheid en versnelling, die historisch den stoot tot de ontdekking der differentiaalrekening hebben gegeven. Natuurlijk doet de schrijver dit opzettelijk, daar zijn doel slechts is een „lückenlosen" opbouw te geven. Hier doet zich de vraag voor of de schrijver een dergelijke behandelingswijze voor een beginnend student doelmatig vindt? Op grond van het aan het eind van de eerste alinea dezer bespreking vermelde citaat uit het voorwoord, moet men dit vermoeden. Daarentegen zegt de schrijver ook in zijn voorwoord, dat in zijn colleges over differentiaal- en integraalrekening de meetkundige toepassingen een groote plaats innemen, doch, dat hij thans zoo gauw mogelijk zijn methode bij het onderricht in differentiaal- en integraalrekening wil bekend maken. Is het boek dus toch weer niet als een eerste leerboek bedoeld? Ook hier is de bedoeling van den schrijver dus weer niet geheel duidelijk.

Naar het oordeel van den schrijver van deze bespreking kan men bij het onderricht in wiskunde niet volstaan met de opsomming van de axioma's, definities en stellingen; doch is het vóór alles noodig, de in te voeren nieuwe begrippen toe te lichten, waarbij deze toelichting vooral rekening moet houden met de wijze, waarop deze begrippen historisch zijn ontstaan, m.a.w. men moet laten zien, dat de begrippen door abstractie zijn ontstaan. Een dergelijke toelichting ontbreekt in het hier thans besproken werk. De schrijver is klaarblijkelijk van meening, dat ze niet in een leerboek thuishoort en dit is ook het essentieele verschil met vele bestaande leerboeken. Indien het werk echter naast een college wordt gebruikt (of op andere wijze wordt toegelicht) is het naar mijn meening zeer geschikt en ik zal dan ook niet nalaten het op mijn college aan te bevelen.

H. D. Kloosterman

DIE ZU EINEM REGELMÄSSIGEN SECHS-, ACHT-, ZWÖLF- UND ZWANZIGFLACH EIN- UND UMBESCHRIEBENEN REZIPROKEN REGULÄREN POLYEDER

von K. F. HARTUNG in Herford.

---

1. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines regelmässigen Körpers sind die Ecken eines einbeschriebenen reziproken regulären Polyeders. Wir zeigen im folgenden, dass sich dem regelmässigen Oktaeder und dem Würfel noch weitere, und zwar unendlich viele reziproke reguläre Körper einbeschreiben lassen, dass sich dagegen dem regelmässigen Dodekaeder und Ikosaeder nur je der reziproke regelmässige Körper in der eingangs erwähnten Weise einbeschreiben lässt. In Kürze kommen wir auf die entsprechenden Sätze für die Umbeschreibung zu sprechen.

Wenn in unserer Ausführung von regelmässigen Körpern die Rede ist, so sind immer nur die *gegenflächigen* regulären Polyeder gemeint. Das Tetraeder schliessen wir also von unseren Untersuchungen aus.

2. Ein regelmässiges Vielflach und ein ihm einbeschriebenes reziprokes reguläres Polyeder haben die Körpermitte gemeinsam. Die Endpunkte einer jeden Körperdiagonale des einbeschriebenen Vielflachs liegen nämlich auf zwei Gegenebenen des umbeschriebenen Polyeders. Folglich liegt die Mitte einer jeden Diagonale auf der Ebene, die durch den Körpermittelpunkt parallel zu den betreffenden gegenüberliegenden Grenzflächen geht. Bei den einzelnen regelmässigen Körpern gibt es entsprechend der Anzahl der Körperdiagonalen 3, 4, 6 bezw. 10 solcher Ebenen, die jedesmal nur einen Punkt, den betreffenden Körpermittelpunkt, gemeinsam haben.

Bewegen wir den einbeschriebenen regelmässigen Körper, dessen Ecken in den Grenzflächenmitten eines regulären Polyeders liegen und dessen Diagonalen senkrecht auf den betreffenden Seitenflächen

PROSPECTUS

BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR DR. D. J. E. SCHREK
LEERAAR AAN HET STEDELIJK GYMNASIUM TE UTRECHT

VIERDE, HERZIENE DRUK



Prijs van het complete boek, groot 192 pag.'s f 2.75, geb. f 3.25

P. NOORDHOFF N.V. — 1934 — GRONINGEN - BATAVIA.

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR

VOORBERICHT BIJ DEN DERDEN DRUK.

De derde druk onderscheidt zich van den vorigen voornamelijk hierdoor, dat eenige onjuistheden en onvolledigheden zijn verbeterd en een aantal gemengde opgaven, die ten onrechte tot dusver ontbraken, aan het einde zijn opgenomen. Ook nu weer is het mij aangenaam, velen te mogen dankzeggen voor allerlei opmerkingen; onder hen noem ik met name Prof. Dr. JAN DE VRIES te Utrecht en de Heeren P. WIJDENES te Amsterdam, A. G. WEIJENBERG te Deventer, Dr. D. P. A. VERRIJP te Arnhem en W. L. NOLKE te Haarlem. De Heer WIJDENES was tevens zoo welwillend, eenige nieuwe figuren te teekenen, terwijl Dr. H. C. SCHAMHARDT te Zeist de vriendelijkheid had, mij de volledige verzameling der Staatsexamenopgaven van de laatste vijf jaren te verstrekken.

UTRECHT, Sept. 1929. D. S.

VOORBERICHT BIJ DEN VIERDEN DRUK.

Terwijl ik getracht heb zoo weinig mogelijk aan den bestaanden tekst te veranderen teneinde het gebruik van verschillende drukken naast elkander mogelijk te maken, heb ik toch weer het aantal opgaven vergroot en, rekening houdend met opmerkingen, die me bereikten, op enkele plaatsen de toelichting iets uitvoeriger gemaakt. Veel dank ben ik verschuldigd aan de Heeren Prof. Dr. JAN DE VRIES te Utrecht, Ir. J. L. HOGEWEG † te Utrecht, P. WIJDENES te Amsterdam, Dr. W. J. FUSS te Aerdenhout, Dr. P. FEENSTRA KUIPER te den Helder en Dr. P. DE VAERE te Brussel, alsmede aan Dr. H. C. SCHAMHARDT te Zeist. Hun opmerkingen heb ik ernstig overwogen, ook als ik een enkele maal meende de gegeven aanwijzingen niet te moeten opvolgen.

UTRECHT, Nov. 1933. D. S.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

COÖRDINATEN.

§ 1. **Coördinaten op de rechte lijn.** Wanneer men op een rechte lijn een vast punt O aanneemt, kan men de ligging van eenig ander punt P op die lijn bepalen door den afstand aan te geven, waarop P van O is verwijderd. Blijkbaar moet men dan echter, om dubbelzinnigheid te vermijden, bovendien nog vermelden aan welken kant van O het punt P gelegen is. Het eenvoudigst doet men dit door aan den afstand van P tot O een teeken toe te kennen en hem positief te noemen als P aan de eene zijde van O is gelegen en negatief als P aan den anderen kant ligt. Hoewel de keuze natuurlijk willekeurig is, is men toch gewoon het deel der lijn, dat *rechts* van O ligt, als positief te beschouwen.

Wanneer men dus op de lijn het punt O (*nulpunt*) en de positieve richting heeft aangenomen, alsmede een bepaalde lengteeenheid (b.v. den centimeter), wordt elk punt gekenmerkt door een zeker algebraïsch getal, dat de ligging van dat punt ten opzichte van O aangeeft.

Dit getal noemt men de *abscis* van het punt. Zoo hebben in bijgaande figuur de punten P_1, P_2 en P_3 achtereenvolgens de

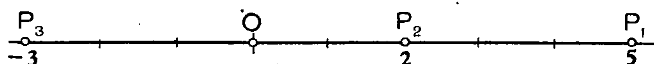


Fig. 1.

abscissen $+5$, $+2$ en -3. Het nulpunt zelf heeft dan de abscis *nul.* Omgekeerd vertegenwoordigt elk algebraisch getal een zeker punt op de lijn.

Men kan dus zeggen:

De punten der lijn en de algebraische getallen staan tot elkaar in zoodanige betrekking, dat elk punt der lijn wordt gekenmerkt door een bepaald getal en dat omgekeerd met elk getal een zeker punt overeenkomt.

§ 2. **Afstand van twee punten op een lijn.** Wanneer men van twee punten op een lijn de abscissen kent, kan men den afstand

der punten gemakkelijk vinden. Hierbij zullen we aan den afstand, in tegenstelling met de abscissen, geen teeken toekennen en dus slechts zijn rekenkundige waarde beschouwen.

Men heeft nu aanstonds den eenvoudigen regel: *de afstand van twee punten is de volstrekte waarde van het verschil der abscissen.* Dat dit geldt voor punten, die beide positieve abscissen hebben, dat dus b.v. (fig. 1) $P_1P_2 = x_1 - x_2$ is, spreekt wel vanzelf. Doch het geldt even goed voor punten, die, als b.v. P_1 en P_3, aan verschillende zijden van het nulpunt liggen; dan is dus eveneens $P_1P_3 = x_1 - x_3$. Want weliswaar moet men meetkundig de stukken OP_1 en OP_3 optellen, maar in het verschil $x_1 - x_3$ is nu x_3 negatief, zoodat men ook inderdaad de aantallen lengteëenheden van OP_1 en OP_3 optelt. In ons geval is b.v. $x_1 - x_3 = (+5) - (-3) = +8$, zoodat de afstand der punten 8 eenheden bedraagt. In verband met wat boven werd opgemerkt let men alleen op de volstrekte waarde van het verschil. Men overtuigt zich verder zonder veel moeite ervan, dat de regel voor alle mogelijke gevallen geldt.

§ 3. **Coördinaten in het platte vlak.** Het ligt nu voor de hand de methode, die voor de rechte lijn werd besproken, uit te breiden op het platte vlak. Men kiest daartoe (fig. 2) twee onderling loodrechte lijnen XX′ en YY′, die elkaar in O snijden. Zij nu P_1 een zeker punt van het vlak; men kan dan uit P_1 loodlijnen P_1Q en P_1R op XX′ en YY′ neerlaten. De plaats van P_1 wordt dan bepaald door de afstanden OQ en OR der voetpunten van die loodlijnen tot O.

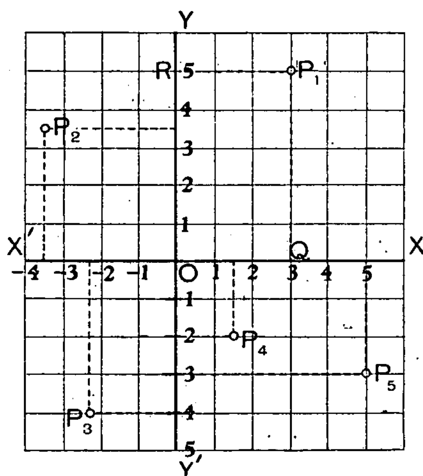


Fig. 2.

Teneinde ook hier weer dubbelzinnigheid te vermijden kiest men op elke der lijnen een positieve en negatieve richting; gewoonlijk noemt men positief het deel van XX′, dat rechts van O, en het deel van YY′, dat boven O is gelegen.

De algebraische getallen, die de lengten van OQ en OR aangeven en die men gewoonlijk door x en y voorstelt, noemt men de *coördinaten* van P_1, en wel in het bijzonder x de *abscis* en y

stehen, derart, dass der Körpermittelpunkt unverändert bleibt, dass aber die Körperdiagonalen mit den entsprechenden des anfänglich einbeschriebenen Vielflachs gleiche Winkel bilden, so geht aus jeder solchen Lage ein einbeschriebener Körper hervor, wenn sämtliche Körperdiagonalen durch eine geeignete gleich- *oder* gegensinnige Streckung so verändert werden, dass dann ihre Endpunkte in je eine entsprechende Grenzfläche fallen. Wir müssen mithin zunächst einmal feststellen, ob bezw. in welcher Weise sich der jeweilig in Frage kommende regelmässige Körper bei festem Mittelpunkt so bewegen lässt, dass hierbei sämtliche Diagonalen mit ihren entsprechenden Ausgangsdiagonalen gleiche Winkel bilden.

3. Den einfachsten Fall von drei Oktaederdiagonalen nehmen wir zum Ausgang unserer Untersuchung. Um dieser Aufgabe gleich die allgemeinste Form zu geben, sei vorausgesetzt, dass die drei durch einen Punkt O gehenden Diagonalen beliebige Richtungen besitzen. Denken wir uns diese drei Geraden starr miteinander verbunden und um den im Raume festen Punkt O frei beweglich, so kann ein solches Dreikant aus einer gegebenen Stellung in eine beliebige andere Stellung bei unveränderter Lage seines Scheitels O immer durch Drehung um eine bestimmte Achse a gebracht werden. Der vorliegende Satz aus der Lehre von den orthogonalen Substitutionen ist bekanntlich auch leicht elementar-geometrisch zu beweisen.[1]) Die Ruhegerade, um die die Drehung erfolgen kann, bildet im allgemeinen mit den Kanten des Dreikants verschiedene Winkel. Dann ist es nicht möglich, dass bei einer Drehung um eine solche Achse jede Kante mit der entsprechenden in der Ausgangsstellung gleiche Winkel bildet. Das lässt sich folgendermassen beweisen. Sind a_1, b_1, c_1 die Kanten in der anfänglichen Stellung $\overline{A}$ und a_2, b_2, c_2 dieselben Geraden in der beliebig angenommenen Endstellung $\overline{\overline{A}}$, ist sodann a die durch den festen Punkt O gehende Achse, die eine Ueberführung der Stellung $\overline{A}$ in die Stellung $\overline{\overline{A}}$ durch Drehung um den Winkel α ermöglicht, so fassen wir den Scheitelpunkt O als Mittelpunkt einer Kugel auf. Die Schnittpunkte der Kugelfläche mit den Geradenpaaren a_1 u. a_2 bezw. b_1 u. b_2 bezw.

---

[1]) Vergl. hierzu etwa: Weber u. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 2. Band 1915, S. 575.

c_1 u. c_2 seien A_1 u. A_2 bezw. B_1 u. B_2 bezw. C_1 u. C_2.[1]) Fällen wir von diesen Punkten aus die zu je zweien gleichen Lote auf die Achse a, so haben die von A_1 u. A_2 bezw. B_1 u. B_2 bezw. C_1 u. C_2 ausgehenden Lote einen gemeinsamen Fusspunkt A bezw. B bezw. C. Da nun die Winkel A_1AA_2, B_1BB_2 und C_1CC_2 gleich gross, nämlich gleich α sind, die Lote A_1A, B_1B und C_1C entsprechend der Voraussetzung, dass die Achse a mit a_1, b_1 und c_1 verschiedene Winkel bildet, aber verschiedene Längen besitzen, so müssen die Strecken A_1A_2, B_1B_2 u. C_1C_2 ungleich sein. Die Winkel A_1OA_2, B_1OB_2 u. C_1OC_2, das sind also die von den Geradenpaaren a_1 u. a_2 bezw. b_1 u. b_2 bezw. c_1 u. c_2 gebildeten Winkel, sind dann ebenfalls verschieden gross, weil A_1A_2, B_1B_2 u. C_1C_2 als ungleiche Sehnen einer Kugel mit dem Mittelpunkt O angesehen werden können.

Wählen wir hingegen als Ruhegerade die Achse eines von den drei Ausgangsdiagonalen bestimmten geraden Kreiskegels, die dadurch ausgezeichnet ist, dass sie mit jeder Diagonalen denselben Winkel bestimmt, so bilden bei solchen Drehungen die drei durch O gehenden Geraden der gegebenen Stellung mit den entsprechenden der neuen Stellung lauter gleiche Winkel. Drei durch einen Punkt O gehende Geraden mit beliebigen Richtungen lassen sich aber als Erzeugende von vier geraden Kreiskegeln auffassen. Das Dreikant mit dem Scheitel O möge nämlich die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, in den Punkten 1, 2, 3 und den entsprechenden Gegenpunkten 1′, 2′, 3′ schneiden. Aus diesen Punkten lassen sich 8 Punktetripel bilden, wobei in demselben Tripel keine Gegenpunkte vorkommen, nämlich: 1, 2, 3 u. 1′, 2′, 3′; 1′, 2, 3 u. 1, 2′, 3′; 1, 2′, 3 u. 1′, 2, 3′; 1, 2, 3′ u. 1′, 2′, 3. Wir fassen nun die Punkte eines jeden Tripels als die Eckpunkte eines Dreiecks auf. Dann besitzen die zu Paaren zusammengestellten Tripel, die durch Spiegelung am Mittelpunkt O der Kugel ineinander übergehen, je zwei Umkreise, die die vier geraden Kreiskegel mit dem gemeinsamen Scheitel O bestimmen, zu deren Erzeugenden die Kanten unseres Dreikants gehören. Die Achsen der 4 verschiedenen geraden Kreis-

---

[1]) Von den entsprechenden Gegenpunkten haben wir hier abgesehen.